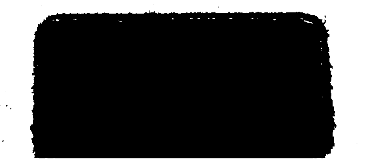




Vorlesungen

über

nautische Astronomie,

gehalten

an der Königl. Marineschule in Kiel

von

Dr. G. D. E. Weyer,

Professor der Mathematik und Astronomie an der Kieler Universität.

Kiel.

Verlag der Schwers'schen Buchhandlung.

1871.

Vorrede.

Mit der Gründung von wissenschaftlichen Anstalten der deutschen Marine ist auch für die nautische Astronomie ein erweitertes Feld der Wirksamkeit eröffnet worden.

Der Vortrag dieser Wissenschaft, bisher gewöhnlich etwas eng begrenzt durch die nächsten Zwecke der praktischen Anwendung, musste dem allgemeinen wissenschaftlichen Plane folgen, welcher an den höheren Unterrichtsanstalten beansprucht wird. Durch die vollständigere mathematische Vorbildung der Zuhörer liess sich Manches abkürzen, was sonst in der Form von ausgeführten Zahlenrechnungen grösseren Umfang erforderte, und dagegen Anderes aufnehmen, welches sich zur Geschichte und Kritik der mannigfachen Leistungen auf dem Gebiete dieser Wissenschaft bei ihrer Entwickelung im Laufe der Zeit dargeboten hat.

Nachdem von der Königlichen Marineschule bereits mehrere wissenschaftliche Veröffentlichungen ausgegangen sind, ist auch der Unterzeichnete, welcher die Ehre hatte, einen Cursus von Vorlesungen über nautische Astronomie an dieser Anstalt zu halten, von der Direction veranlasst worden, seine Bearbeitung dieses Gegenstandes durch den Druck zur weiteren Benutzung bekannt zu machen.

Mit dem Wunsche, dadurch den Zuhörern einen brauchbaren Leitfaden für diesen Theil ihrer Studien zu bieten, und für spätere Bearbeitungen einige berücksichtigenswerthe Collectaneen geliefert zu haben, schliesst

Kiel, den 9. September 1870.

der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

I. Kapitel.

Allgemeine Erklärungen.

---

§ 1. Die nautische Astronomie lehrt die Bestimmung der Lage der Oerter auf der Erde durch nautisch-astronomische Beobachtungen. Die Nothwendigkeit astronomischer Beobachtungen zur geographischen Ortsbestimmung auf dem Meere ergiebt sich aus der Unzulänglichkeit der im terrestrischen Theile der Navigation für denselben Zweck angewandten Hülfsmittel, hauptsächlich wegen der nicht hinreichend bekannten Strömungen, sowie auch schon wegen der unvermeidlichen Anhäufung der Fehler in der Fahrtmessung und in den gesteuerten Cursen bei längeren, von bekannten Küsten entlegenen Reisen.

§ 2. Die Möglichkeit, aus Beobachtungen am Himmel die Lage des Beobachtungsortes auf der Erde bestimmen zu können, liegt zunächst darin, dass um den Erdkörper eine concentrische Himmelskugel von beliebiger Grösse z. B. bis zu den beobachteten Gestirnen gedacht werden kann, und demnach ein Bogen auf der Erde, wie die geographische Breite oder genauer der entsprechende Winkel, zu einem ähnlichen Bogen am Himmel gehört, dessen Grösse sich mit Hülfe der Gestirne messen lässt. Ferner bietet die gleichförmige Drehung der Erde um eine im Erdkörper selbst unveränderliche Axe das Mittel zur Bestimmung der Zeit eines Beobachtungsortes, und die Vergleichung dieser Ortszeit mit der Zeit des als ersten angenommenen Meridians giebt auch die geographische Länge. Die

Zeit des ersten Meridians wird dabei entweder durch ein Chronometer angegeben, oder auch vom Himmel selbst wieder entnommen durch Beobachtung des Ortes des Mondes, welcher sich unter allen Gestirnen am schnellsten verändert, und daher am besten geeignet ist, auf die zu dem Orte des Gestirnes gehörige Zeit schliessen zu können. Die Mondsörter sind für diesen Zweck schon in den nautisch-astronomischen Jahrbüchern vorausberechnet gegeben.

§ 3. Ausserdem wird durch astronomische Beobachtungen, welche die Richtung der Weltgegenden bestimmen, auch die wahre Richtung der damit verglichenen Magnetnadel bekannt. Die Abweichung der Magnetnadel vom wahren Nord ist die magnetische Declination oder die Missweisung oder Variation des Compasses.

§ 4. Wegen des Zusammenhanges der Zeiten von Fluth und Ebbe mit dem Stande der Sonne und des Mondes, beruht endlich eine genäherte Bestimmung dieser Zeiten zunächst ebenfalls auf astronomischer Grundlage.

§ 5. Zusammenstellung der Erklärungen der vorkommenden astronomischen Ausdrücke.

1) Weltaxe heisst die verlängerte Erdaxe, also die unbegrenzt gedachte gerade Linie, um welche die Erde ihre tägliche Drehung vollzieht.
2) Weltpole oder Pole des Himmels sind diejenigen Punkte, wohin die Weltaxe zeigt. Nord- und Südpol des Himmels liegen dabei über dem entsprechenden Nord- und Südpole der Erde.
3) Der Aequator des Himmels hat mit dem Aequator der Erde eine gemeinschaftliche Ebene. Es ist also ein grösster Kreis der Himmelskugel, welcher von den Polen überall um 90 Grade entfernt ist.
4) Die Himmelskugel selbst aber ist eine um den Mittelpunkt der Erde mit einem willkührlich grossen Radius beschrieben gedachte mathematische Kugel, unabhängig von der Gestalt des Erdkörpers, dem nur eine kugelähnliche (sphäroidische) Gestalt zukommt und zwar die

eines abgeplatteten elliptischen Sphäroides (abgeplattetes Ellipsoid).

5) Zenith oder Richtung des Scheitelpunktes wird derjenige Punkt genannt, wohin der aufwärts verlängerte, freihängende Lothfaden zeigt, also eine der Schwerkraft auf Erde genau entgegengesetzte Richtung.

6) Nadir ist der dem Zenith entgegengesetzte Punkt.

7) Wahrer Horizont wird der grösste Kreis genannt, welcher überall 90 Grade vom Zenith, also auch vom Nadirpunkte entfernt ist, und dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Erde geht.

8) Scheinbarer Horizont ist die durch das Auge des Beobachters parallel mit dem wahren Horizont gelegte Ebene.

9) Meereshorizont oder Seehorizont (holländisch und friesisch Kim und Kimming) wird die Begrenzung genannt, welche die Gesichtslinien als Tangenten zur Erdoberfläche bilden, wo dieselbe als frei sichtbare Meeresfläche erscheint.

10) Depression des Meereshorizonts oder Kimmtiefe ist der Winkel, welchen die Gesichtslinie nach dem Meereshorizonte mit der genau horizontalen Richtung bildet.

11) Der Meridian der Himmelskugel ist ein durch Zenith und Pol gelegter grösster Kreis.

12) Culmination eines Gestirnes ist die Bezeichnung, dass es sich im Meridian befindet. (Obere und untere Culmination).

13) Nord- und Südpunkt des Horizonts sind diejenigen Punkte, wo der Meridian den Horizont schneidet; und zwar heisst derjenige Punkt der Nordpunkt, welcher dem nördlichen Pole zunächst liegt, Südpunkt der andere, welcher dem Südpole näher liegt.

14) Ost- und Westpunkt des Horizonts heissen diejenigen Punkte, wo der Aequator den Horizont schneidet, oder die Punkte, welche um 90 Grade von dem Nord- und Südpunkte entfernt sind. Der Ostpunkt liegt rechts vom Nordpunkte, wenn das Gesicht nach Norden gerichtet ist.

15) Stundenkreise heissen im Allgemeinen alle von Pol zu Pol gedachten grössten Kreise.
16) Verticalkreise sind die grössten Kreise, welche durch Zenith und Nadir gehen.
17) Erster Vertical wird der durch den Ost- und Westpunkt gelegte Verticalkreis genannt.
18) Sechsuhrkreis heisst der durch den Ost- und Westpunkt gezogene Stundenkreis.
19) Stundenwinkel eines Gestirnes ist der sphärische Winkel, welcher am Pole zwischen dem Stundenkreise durch das Gestirn und dem oberen Theile des Meridians gebildet wird.
20) Azimuth eines Gestirns ist der Winkel am Zenith zwischen dem Meridiane und dem Verticalkreise des Gestirns.
21) Amplitude ist das Complement des Azimuthwinkels, oder der entsprechende Bogen des Horizonts und wird demnach vom Ost- oder Westpunkte bis zum Verticalkreise des Gestirns gezählt, ist aber nur gebräuchlich, wenn das Gestirn sich im Horizont befindet. (Morgen- und Abendamplitude der Sonne.)
22) Declination, nördliche oder südliche eines Punktes der Himmelskugel, heisst dessen nördlicher oder südlicher Abstand vom Aequator. Das Complement der Declination ist die Polardistanz.
23) Declinationsparallel eines Gestirns wird der durch das Gestirn parallel mit dem Aequator gelegte kleinere Kreis genannt. Ist das Gestirn die Sonne, so nennt man die beiden Punkte, wo der Declinationsparallel den Meridian schneidet, oberhalb den Mittagspunkt, unterhalb den Mitternachtspunkt.
24) Höhe eines Gestirns ist dessen Abstand vom Horizonte, oder der Winkel, welchen die Gesichtslinie nach dem Gestirne mit der Ebene des Horizontes bildet. Das Complement der Höhe heisst Zenithdistanz.
25) Höhenparallel (Almucantar), ein kleinerer Kreis parallel zum Horizonte durch das Gestirn gelegt.

26) Ekliptik wird die Ebene genannt, in welcher sich die Erde um die Sonne bewegt, also ein grösster Kreis der Himmelskugel in welchem die Sonne ihren jährlichen Umlauf zu machen scheint, oder der scheinbare Weg der Sonne zwischen den festen Sternen.

27) Schiefe der Ekliptik ist der Winkel von ungefähr 23½ Graden (23° 28′), unter welchem die Ekliptik gegen den Aequator geneigt ist, also auch das Complement des Winkels, welchen die Erdaxe mit der Ebene der Erdbahn bildet. Die Schiefe der Ekliptik vermindert sich jährlich um eine halbe Secunde, weil die Ebene der Erdbahn um so viel in ihrer Lage durch die Anziehung der Planeten verändert wird. Diese Veränderung ist von sehr langer, durch viele Jahrhunderte fortgehender Periode (säculare Aenderung), bevor sie zum Stillstande und darauf zur Rückkehr gelangt. Ausserdem hat die Schiefe der Ekliptik kleine Aenderungen von kurzer Periode (periodische Aenderungen) durch die Nutation (Erklärung 46).

28) Breite eines Gestirns heisst dessen Abstand von der Ekliptik oder der Winkel, welchen die Gesichtslinie nach dem Gestirne mit der Ebene der Erdbahn macht.

29) Breitenkreise werden die senkrecht zur Ekliptik gezogenen grössten Kreise genannt.

30) Pole der Ekliptik sind die Punkte der Himmelskugel, welche senkrecht über und unter der Ebene der Erdbahn liegen. Der nördliche Pol der Ekliptik ist der auf der nördlichen Halbkugel liegende.

31) Aequinoctialpunkte des Frühlings und des Herbstes sind die beiden Punkte, wo Aequator und Ekliptik sich schneiden. Der Frühlingspunkt ist derjenige, wo die Sonne zur nördlichen Halbkugel übergeht und der entgegengesetzte ist der Herbstpunkt. Der Frühlingspunkt wird auch erster Punkt des Widders (Principium Arietis) genannt und dient als Anfangspunkt von Coordinatensystemen.

32) Solstitialpunkte heissen die von den Aequinoctialpunkten um 90 Grade entfernten Punkte der Ekliptik, wo die Sonne ihren Stillstand, nämlich ihre grösste nördliche oder südliche Declination von ungefähr 23½ Graden erreicht.

Mit dem Eintritt der Sonne in die Aequinoctial- und Solstitialpunkte entsteht der. Wechsel der Jahreszeiten. Die ungleiche Dauer der Jahreszeiten hängt von der Excentricität der Erdbahn ab und von der Lage der Apsidenlinie oder grossen Axe der Erdbahn. Die Excentricität der Erdbahn ist = $^1/_{60}$ und die Lage der Apsidenlinie jetzt so, dass die Erde zu Anfang des Januar in die Sonnennähe, Anfang Juli in die Sonnenferne gelangt, und die Jahreszeiten werden folgende:

Frühling	=	92	Tg.	22	St.
Sommer	=	93	„	14	„
Herbst	=	89	„	17	„
Winter	=	89	„	1	„

so dass Frühling und Sommer zusammen fast acht Tage länger dauern als Herbst und Winter.

33) Die Wendekreise und Polarkreise sind auch auf der Himmelskugel Parallelkreise zum Aequator, die Wendekreise 23½ Grade vom Aequator, und die Polarkreise 23½ Grade von den Polen entfernt. Der nördliche Wendekreis wird auch der Wendekreis des Krebses (Tropicus Cancri) und der südliche der Wendekreis des Steinbocks (Tropicus Capricorni) genannt. Die Polarkreise heissen der nördliche oder arktische und der südliche oder antarktische. In der älteren Astronomie und Geographie wurden übrigens der arktische und antarktische Kreis diejenigen Kreise genannt, welche parallel mit dem Aequator durch die Nord- und Südpunkte des Horizonts gelegt waren, von denen der erste die nicht untergehenden Sterne (Circumpolarsterne) begrenzte, der andere die nicht aufgehenden, sondern beständig unter dem Horizonte bleibenden Sterne.

34) Der Zodiakus oder Thierkreis ist ein Gürtel, welchen man um die Ekliptik als Mittellinie und in solcher Breite angenommen hatte, dass ausser der Sonne auch der Mond und die Planeten sich beständig in dieser Region befinden sollten. Früher genügte dazu eine Breite von 8 bis 9 Graden zu jeder Seite der Ekliptik, welche aber nach den neueren Entdeckungen der Planeten nicht für alle ausreichen würde, da die Bahnen der kleinen Planeten sich zum Theil viel weiter von der Ekliptik entfernen.

35) Zeichen des Thierkreises nennt man die 12 gleichen Stücke von je 30 Graden, in welche die Ekliptik eingetheilt zu werden pflegte. Sie haben die von den Sternbildern hergenommenen Namen: Widder, Stier, Zwillinge, Krebs, Löwe, Jungfrau, Waage, Scorpion, Schütze, Steinbock, Wassermann, Fische. — Die Zählung nach diesen Zeichen ist ausser Gebrauch gekommen, da man die Bögen der Ekliptik nach Graden u. s. w. zu messen vorgezogen hat.

36) Länge eines Gestirns ist ein Bogen der Ekliptik vom Frühlingspunkte bis zum Breitenkreise des Gestirns, und wird bis zu 360° nach Osten gezählt.

37) Rectascension oder gerade Aufsteigung (ascensio recta) eines Gestirns heisst der Bogen des Aequators vom Frühlingspunkte bis zum Stundenkreise des Gestirns ostwärts gerechnet. Der Name rührt aus der älteren Astronomie her, wo man auch eine schiefe Aufsteigung (ascensio obliqua) zur Bezeichnung des Aequatorbogens gebrauchte, welcher vom Frühlingspunkte bis zu demjenigen Punkte des Aequators sich erstreckt, der mit dem Sterne zugleich aufgeht. Der Unterschied zwischen beiden Aufsteigungen wird Ascensionaldifferenz genannt. In Beziehung auf die Sonne würde es die Zeit sein, um welche die Sonne vor oder nach 6 Uhr auf- oder untergeht.

38) Wahre Zeit ist der Stundenwinkel der Sonne. Um die Zeit nicht rückwärts zu zählen, wird dieser Stundenwinkel am Vormittage von 180° oder 12 Stunden subtrahirt.

39) Mittlere Zeit ist der Stundenwinkel einer mittleren Sonne, welche so gedacht wird, dass sie mit gleichförmiger Geschwindigkeit denselben Weg im Aequator beschreibt, welchen die wahre Sonne während eines Jahres mit ungleichförmiger Geschwindigkeit in der Ekliptik zu beschreiben scheint. Es wird dabei ferner angenommen, dass überhaupt die Rectascension der mittleren Sonne immer so gross wie die mittlere Länge der Sonne zu setzen ist, jedoch mit Hinzufügung einer kleinen Correction für die periodische Ungleichheit (Nutation in Rectascension) in der Bewegung des Frühlingspunktes.

40) Zeitgleichung ist der Unterschied zwischen der wahren und mittleren Zeit oder

d. Zeitgl. = Rectasc. d. wahren Sonne — Rectasc. d. mittl. S.

Die Zeitgleichung kann höchstens 16 Minuten betragen. Die beiden Ursachen, welche die Zeitgleichung hervorbringen, sind: 1) die Ungleichförmigkeit der Bewegung der Erde in ihrer elliptischen Bahn um die Sonne mit Einschluss der planetarischen Störungen und 2) die schräge Lage der Ekliptik gegen den Aequator. Die Vertheilung der Zeitgleichung im Laufe des Jahres ist zur Uebersicht in der folgenden Tabelle enthalten, wonach die Zeitgleichung viermal im Jahre = 0 wird.

	Maxima und Minima der Zeitgleichung	Mittlere Zeit im wahren Mittage
11. Febr.	+ 14′ 34″	0^h 14′ 34″
15. Apr.	0. 0.	0. 0. 0.
14. Mai	— 3. 54.	23. 56. 6.
15. Juni	0. 0.	0. 0. 0.
26. Juli	+ 6. 10.	0. 6. 10.
1. Sept.	0. 0.	0. 0. 0.
2. Nov.	— 16. 18.	23. 43. 42.
24. Dec.	0. 0.	0. 0. 0.

41) Sternzeit ist der Stundenwinkel des Frühlingspunktes. Die Sternzeit ist also auch die Rectascension des Meridians oder die Summe des westlichen Stundenwinkels eines Gestirns und der Rectascension desselben.

42) Sterntag, wahrer Sonnentag und mittlerer Sonnentag bezeichnen die Zeiträume zwischen zwei auf einander folgenden gleichartigen Culminationen, respective eines Fixsterns (oder vielmehr des Frühlingspunktes), ferner der wahren Sonne und der mittleren Sonne. Von diesen drei Arten von Tagen, welche jeder in 24 Stunden eingetheilt werden, ist der wahre Sonnentag wegen der angeführten Ungleichheiten etwas veränderlich. Die Dauer des wahren Sonnentages ist im Maximum = $24^h\ 0'\ 30''$ mittl. Zeit am 23. Decbr., und im Minimum = $23^h\ 59'\ 39''$ mittl. Zeit am 17. Septbr. Der Sterntag und der mittlere Sonnentag sind unveränderlich. Ihr Verhältniss zu einander ergiebt sich daraus, dass die Sonne, nach einem vollen Umlauf der Erde um dieselbe einmal weniger culminiren muss, als ein Fixstern (oder der Frühlingspunkt). Die Erde bewegt sich also während ihres Umlaufs um die Sonne, nämlich in 365¼ Tagen, zugleich 366¼ mal um ihre Axe, so dass 365¼ mittlere Tage = 366¼ Sterntagen, daher 1 mittlerer Tag oder 24 Stunden mittlere Zeit = $24^h\ 3'\ 56{,}_{56}''$ Sternzeit und umgekehrt 1 Sterntag oder 24 Stunden Sternzeit = $23^h\ 56'\ 4{,}_{09}''$ mittlere Zeit betragen. Der Sterntag beginnt mit dem Eintritte des Frühlingspunktes in den Meridian.

43) Das siderische Jahr bezeichnet die vollständige Umlaufszeit der Erde um die Sonne, nämlich die Rückkehr zu genau derselben Richtung, z. B. nach demselben Fixsterne, und beträgt $365{,}_{25638}$ Tage = 365 Tage $6^h\ 9'\ 11''$ mittlere Zeit.

44) Das tropische Jahr ist die Zeit, welche bis zur Rückkehr der Sonne zum Frühlingspunkte verfliesst und beträgt $365{,}_{24222}$ Tage = 365 Tage $5^h\ 48'\ 48''$ mittlere Zeit.

Der Grund des Unterschiedes zwischen dem siderischen und tropischen Jahre ist die Präcession.*)

45) Die **Präcession** oder das Vorrücken der Nachtgleichen (Praecessio aequinoctiorum) bedeutet die Bewegung der Aequinoctial-Punkte, welche jährlich um 50,2″ (Constante der Präcession) rückwärts oder nach Westen, nämlich gegen die Zeichen auf der Ekliptik, fortschreiten, so dass die Sonne den Aequinoctialpunkt, wovon sie ausging, um 20 Min. 23 Sec. früher erreicht (als es ohne die Präcessionsbewegung der Fall sein würde), die mittlere tägliche Bewegung der Sonne zu 59′ 8″ gerechnet. Der Ursprung der Präcessionsbewegung liegt in der abgeplatteten Gestalt der Erde, auf welche der Mond und die Sonne so einwirken, dass die Erdaxe, bei ihrer schrägen Stellung gegen die Ebene der Erdbahn, statt genau sich selbst parallel zu bleiben, langsam einen Kegel beschreibt, der in $\frac{360^{0}}{50{,}2''} = 25800$ Jahren vollendet sein würde. Die Richtung dieser Bewegung ist der täglichen Rotations-Bewegung der Erde entgegengesetzt und als Wirkung davon ergiebt sich, dass die Längen aller Fixsterne jährlich um 50,2″ grösser werden, während ihre Breiten unverändert bleiben. Die Präcession wurde von Hipparch (im 2. Jahrh. v. Ch.) entdeckt, und von Newton (1687) zuerst die wahre Ursache derselben erklärt. Durch die Präcession wird auch die Lage der Apsidenlinie der Erdbahn gegen den Frühlingspunkt jährlich um 50,2″ verändert. Da aber diese Apsidenlinie noch eine eigene fortschreitende Be-

*) Mit den genauen Jahreslängen wird das Verhältniss $\frac{366\,^1/_4}{365\,^1/_4}$ in No 42:

$$\frac{366{,}25638}{365{,}25638} = 1^{T}\ 0^{h}\ 3'\ 56{,}546''$$

$$\frac{366{,}24222}{365{,}24222} = 1.\ 0.\ 3.\ 56{,}555.$$

Die Differenz ist nur 0,009, aber die tropische Jahreslänge ist hierbei allein anzuwenden, da die Sternzeit nach dem Frühlingspunkte, nicht nach den Sternen gemessen werden soll.

wegung hat, wie Albategnius (im 9. Jahrh.) entdeckte und deren Betrag gegenwärtig $11\frac{1}{4}$ Sec. ist, so wird die Gesammtveränderung 61″ jährlich, wodurch die Dauer der einzelnen Jahreszeiten (Erklär. 32) allmählich sich etwas ändern muss. Die Länge des Punktes der Sonnennähe (Perihel) war zu Anfange dieses Jahrhunderts = 99° 30′ und daher im Jahre 1868 = 100° 39′. Diese Länge ist heliocentrisch oder von der Sonne aus gesehen; sie wird also geocentrisch 180° grösser = 280° 39′.

46) Die Aberration oder Abirrung des Lichtes, von Bradley entdeckt (Phil. Transact. 1728), bezeichnet eine scheinbare Ortsveränderung der Gestirne, hervorgebracht durch die allmähliche Fortpflanzung des Lichtes in Verbindung mit der Bewegung der Erde in ihrer Bahn. Da das Licht in einer Secunde 42000 Meilen, die Erde aber in derselben Zeit nur 4 Meilen fortschreitet, so wird das Verhältniss dieser Geschwindigkeiten nahe $\frac{1}{10000}$ und der Winkel, dessen Tangente diese Grösse hat, ist genauer gerechnet 20,4″ (Constante der Aberration). Die Gestirne welche in der Ebene der Ekliptik liegen, werden daher um 20″ scheinbar nach der einen oder anderen Seite verschoben erscheinen, und nur in dem Falle, wo die Bewegung der Erde mit der Richtung nach den Sternen zusammenfällt, an ihrem wahren Ort gesehen werden. Ein Stern im Pol der Ekliptik beschreibt scheinbar einen Kreis von 20″ Radius um diesen Pol, und für die übrigen Sterne verwandelt sich der Kreis in eine Ellipse, deren grosse Axe 40″ beträgt und parallel zur Ekliptik liegt; in der Ekliptik selbst geht diese Aberrationsellipse in eine grade Linie über.

47) Die Nutation ist eine kleine elliptische Bewegung der Erdaxe um ihre mittlere Richtung. Die grösste Ablenkung der Erdaxe von ihrem mittleren Orte beträgt hiernach 9,2″ (Constante der Nutation). Die Richtung dieser rotirenden Bewegung geschieht in demselben Sinne, wie die Präcessionsbewegung der Erdaxe, und vollendet sich in

$18^3/_5$ Jahren, in welcher Zeit zugleich die Mondbahn in ihre frühere Lage zurückkehrt, so dass hiermit die wechselnde Lage der Mondbahn als Hauptursache der Nutation erkannt wurde. Die Nutation ist von Bradley aus 18jähr. Beobachtungen (von 1727 bis 1745) entdeckt worden.

48) Der siderische Monat oder die Umlaufszeit des Mondes um die Erde beträgt im Mittel $27^1/_3$ Tage oder genauer 27 Tg. 27 St. 43′ 5″ mittl. Zeit.

49) Der synodische Monat oder die Zeit von einer Zusammenkunft (Conjunction) des Mondes mit der Sonne bis zur nächst folgenden, also die Zeit von einem Neumonde zum andern, ist durchschnittlich $29^1/_2$ Tage oder genauer 29 Tg. 12^h 44′ 3″ mittl. Zeit.

50) Der anomalistische Monat ist die Zeit von einer Erdnähe des Mondes zur andern und beträgt 27 Tg. 13^h 18′ 37″ mittl. Zeit. Der Ort der Erdnähe und Erdferne des Mondes oder die Verbindungslinie dieser Punkte der Mondsbahn (Apsidenlinie) wird durch die Anziehung der Sonne fast beständig in Bewegung gehalten, und schreitet durchschnittlich in 9 Jahren um volle 360 Grade vorwärts in der Richtung nach Osten oder nach der Ordnung der Zeichen.

51) Der Drachenmonat oder die Zeit, welche der Mond gebraucht, um von einem Durchschnittspunkte seiner Bahn mit der Ekliptik bis zum folgenden gleichartigen Durchschnittspunkte zurückzukehren, ist im Mittel = 27 Tg. 5^h 5′ 36″ mittl. Zeit. Diese Art der Umlaufszeit des Mondes ist also die kürzeste von allen.

52) Die Knotenpunkte der Mondsbahn sind die Durchschnittspunkte derselben mit der Ekliptik oder Erdbahn, und zwar wird aufsteigender Knoten derjenige genannt, wo der Mond bei dem Durchschneiden der Ekliptik sich nordwärts bewegt; der entgegengesetzte heisst der niedersteigende. Eine ältere Bezeichnung dieser Knotenpunkte als Drachenkopf und Drachenschwanz ist noch in dem Worte Drachenmonat übrig geblieben. Die Knoten

der Mondbahn ändern sich schon nach einem Umlaufe des Mondes um 1½ Grade in rückgängiger Bewegung (von Osten nach Westen) so dass sich die Mondsbahn in $18^3/_5$ Jahren oder genauer in 18 Jahren (julianisch zu 365¼ Tg.) 218 Tg. 10^h 26′ 34″ siderisch, oder tropisch in 18 J. 223 Tg. 8^h 3′ 14″ ganz auf der Ekliptik herumgeschoben hat. Die Ursache dieser Rückwärtsbewegung der Knotenpunkte ist zuerst von Newton (1687) aus der Einwirkung der Sonne auf die Mondbewegung erklärt worden. Die Sonne nämlich sucht den Mond vorwiegend auf die Verbindungslinie zwischen Erde und Sonne herabzuziehen. Diese Kraftäusserung, verbunden mit dem Beharrungsvermögen des Mondes in seiner Bewegung, giebt nach dem Parallelogramm der Kräfte die rückgängige Bewegung der Knotenlinie, ähnlich wie bei einem Kreisel oder anderen Rotationsapparaten.

53) Die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik wechselt von 5° 0′ bis 5° 18′ und ist im Mittel 5° 8″ 40″. Die Declination des Mondes kann hiernach bis auf 5° 18′ + 23° 28′ = 28° 46′ steigen.

54) Von den Planeten kommen in der nautischen Astronomie nur die 4 hellsten zur Anwendung: Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Ihre Umlaufszeiten um die Sonne und ihre mittleren Entfernungen von derselben sind, wenn die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne = 1 gesetzt wird:

Venus:	Entfernung =	0,7;	Umlaufszeit =	225 Tage.
Mars:	„	1,5;	„	687 „
Jupiter:	„	5,2;	„	12 Jahre.
Saturn:	„	9,5;	„	29½ „.

In demselben Massstabe ist die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde $= \frac{1}{400}$ oder genauer $\frac{1}{388{,}7}$.

55) Die astronomische Refraction bezeichnet die Grösse der Brechung der Lichtstrahlen, welche von äusseren Punkten in die Atmosphäre gelangen, oder den Betrag, um welchen alle Gestirne dem zufolge etwas höher er-

scheinen, als es ohne diese Strahlenbrechung der Fall sein würde.

56) Die terrestrische Refraction ist die Ablenkung der Lichtstrahlen, welche von entlegenen irdischen Gegenständen zum Auge gelangen. Die Grösse der terrestrischen Refraction ist von der verschiedenen Dichtigkeit der Luftschichten auf dem Wege des Lichtstrahls abhängig.

57) Die Parallaxe eines Gegenstandes soll im Allgemeinen die Verschiedenheit der Richtung zweier Linien bezeichnen, welche nach dem Gegenstande von zwei verschiedenen Standpunkten gezogen sind. Man unterscheidet besonders folgende Arten von Parallaxen:

a) die Horizontalparallaxe eines Gestirns ist der Winkel am Gestirn zwischen den beiden Linien, welche vom Gestirne nach dem Mittelpunkte der Erde und nach dem Auge des Beobachters gerichtet sind, im Falle das Gestirn im Horizonte steht;

b) die Höhenparallaxe ist der Winkel am Gestirn zwischen denselben beiden Linien, wenn das Gestirn sich in beliebiger Höhe befindet;

c) die jährliche Parallaxe eines Gestirns ist der Winkel an demselben zwischen den beiden Linien, von denen die eine nach der Sonne, die andere nach der Erde gerichtet ist;

d) die Parallaxe eines Instrumentes, bei Reflexionsinstrumenten auch Spiegelparallaxe genannt, ist im letzteren Falle der Winkel am direct gesehenen Objecte zwischen den beiden Richtungen von dort nach der Mitte des grossen Spiegels und nach dem Auge des Beobachters.

II. Kapitel.

Die Gestalt der Erde.

§ 6. Wäre die Erde eine genaue Kugel, so müssten die einzelnen Grade des Meridians oder die Breitengrade alle von gleicher Grösse sein. Dagegen haben die Gradmessungen in verschiedenen Breiten, zunächst in Frankreich im 17. Jahrh. (von Picard, Cassini, La Hire) verglichen mit der Gradmessung in Lappland (1736 von Maupertuis, Clairant u. A. zuerst ausgeführt) gezeigt, dass die höheren Breitengrade entschieden grösser werden. Die Vergleichung mit der genaueren, um dieselbe Zeit unternommenen, aber später vollendeten Gradmessung in Peru (von Bouguer, Condamine) bestätigte nicht nur die Vermuthungen von Huygens und Newton, dass der Erdkörper ein an den Polen seiner Rotationsaxe abgeplattetes elliptisches Sphäroid (abgeplattetes Ellipsoid) sei, sondern ergab auch den Betrag der Abplattung in ziemlich naher Uebereinstimmung mit dem von Newton aus der Theorie der Rotationswirkung hypothetisch berechneten Werthe.

§ 7. Aufgaben.

1) Aus der gegebenen geographischen Breite eines Ortes die geocentrische Breite desselben zu bestimmen, wenn das Axenverhältniss der Erde $= \frac{b}{a}$ bekannt ist.



Auflösung. Ist φ die geographische Breite des Ortes oder der Winkel der Lothlinie mit der Ebene des Aequators, ψ die geocentrische Breite oder der Winkel, welchen die Entfernung r dieses Ortes vom Mittelpunkte der Erde mit der Ebene des Aequators bildet, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{MN} \text{ und } \operatorname{tg} \psi = \frac{y}{a - x}$$

wo MN die Subnormale, x und y die Coordinaten des Beobachtungsortes bezeichnen, x vom Scheitel der Ellipse gezählt. Hieraus ergiebt sich nach der Substitution von $MN = y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a-x)$ die Formel zur Auflösung:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$$

Das Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ ist nach den letzten Bestimmungen von Bessel (1841) aus 10 Gradmessungen $= \frac{299{,}15}{300{,}15}$ oder die Abplattung $\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299{,}15}$ oder nahe $= \frac{1}{300}$. In den Sammlungen der nautisch-astronomischen Tafeln (z. B. Tab. XIX Domke) ist für die gegebenen Werthe von φ von 0° bis 90° die Differenz $\varphi - \psi$ zu entnehmen. Z. B. für $\varphi = 54^\circ\, 19'$ ergiebt sich $\varphi - \psi = 10'\, 53{,}3''$.

Um die Differenz $\varphi - \psi$ direct zu finden, hat man, wenn das Excentricitätsverhältniss $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$ gesetzt wird, $\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi = \varepsilon^2 \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos \varphi \cos \psi}$;

$$\varepsilon^2 \sin \varphi = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos \psi} = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos[\varphi - (\varphi - \psi)]}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg}(\varphi - \psi)}, \text{ daher}$$

$$\mathrm{tg}\,(\varphi - \psi) = \frac{\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}$$

oder durch Division

$= \varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi + \varepsilon^4 \sin\varphi^3 \cos\varphi + \varepsilon^6 \sin\varphi^5 \cos\varphi + \dots$

Setzt man zur Abkürzung näherungsweise die Tangente dem Bogen gleich, so ist mit Weglassung des dritten Gliedes

$$\varphi - \psi = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^4 \sin\varphi^3 \cos\varphi$$

Der anzuwendende Werth von ε ist mit der Abplattung $^1/_{300}$ nahe $= {}^1/_{12}$ oder genauer $\varepsilon = \frac{1}{12{,}26}$. Die Abplattung $\frac{1}{299{,}1528}$ giebt $\log \varepsilon = 8{,}9122052$ nach Bessel oder $\varepsilon = \frac{1}{12{,}2404}$.

Im obigen Beispiele $\varphi - \psi = 10'\,50{,}4'' + 2{,}9'' = 10'\,53{,}3''$.

Es ist auch $\varepsilon^2 = 2\alpha - \alpha^2$, wo α die Abplattung $= \frac{a-b}{a}$ bezeichnet, oder genähert $\varepsilon^2 = 2\alpha$, daher

$$\varphi - \psi = \alpha \sin 2\varphi,$$

eine Näherungsformel von Tob. Mayer,

(Tab. mot. Sol. et Lun. 1770).

Nach der strengen Formel wird $\varphi - \psi$ ein Maximum für $\varphi = 45^0\, 5'\, 45''$.

2) Gegeben: Die geographische Breite $= \varphi$ und das Axenverhältniss $\frac{b}{a}$, also auch die geocentrische Breite $= \psi$.

Gesucht: Der Erdradius $=$ r oder die Entfernung des Beobachters vom Mittelpunkte der Erde.

Auflösung: Aus $r = \frac{a - x}{\cos\psi}$, $y^2 = r^2 \sin\psi^2$ und $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, wenn $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt wird, folgt $r^2 \sin\psi^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ oder $a^2 - \frac{a}{p}\, r^2 \sin\psi^2 = (a-x)^2$; aber auch $r^2 \cos\psi^2 = (a - x)^2$, daher

$$r = \frac{a}{\sqrt{(\cos\psi^2 + \frac{a}{p}\sin\psi^2)}} = \frac{a}{\sqrt{(\cos\psi^2 + \frac{a^2}{b^2}\sin\psi^2)}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin\psi^2)}}$$

Für die logarithmische Rechnung ist bequemer:

$$r = a\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\psi\cos(\varphi - \psi)}}$$

und als Function der geogr. Breite allein ausgedrückt, mit Hülfe der Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a}$ erhält man:

$$r = a\,(1 - \alpha\sin\varphi^2 + \tfrac{5}{8}\alpha^2\sin 2\varphi^2 \ldots)$$

Beispiel: Für $\varphi = 54^0\ 19'$, oder $\psi = 54^0\ 8'\ 7''$ wird $\log r = 9{,}9990435 - 10$ wenn $a = 1$ gesetzt ist.

3) Gegeben: Die gemessene Länge eines Breitengrades $= g$.

Gesucht: Die Grösse der Erde, wenn dieselbe als Kugel angenommen wird.

Auflösung: Der Erdhalbmesser $= a = \frac{360\,g}{2\pi}$.

Beispiel: Nach der ersten genaueren Gradmessung im nördlichen Frankreich war die Länge eines Breitengrades $= 57061$ Toisen, die mittlere Breite (zwischen Paris und Amiens) $= 49^0\ 23'$. Hieraus folgt $a = 3269354$ Toisen.

4) Gegeben: Zwei Gradmessungen, nämlich die Grössen g und g' von zwei verschiedenen Breitengraden und die dazu gehörigen geographischen Breiten φ und φ'.

Gesucht: Die Gestalt der Erde oder das Axenverhältniss $\frac{b}{a}$.

Auflösung: Ist ϱ der Krümmungshalbmesser für die Breite φ, und p der halbe Parameter des elliptischen Meri-

dians $\left(p = \frac{b^2}{a}\right)$, so ist $\varrho = \frac{N^3}{p^2}$, N die Länge der Normale $= \frac{y}{\sin \varphi}$, $y = r \sin \psi$ so ergiebt sich:

$$\varrho = \frac{r^3 \sin \psi^3}{p^2 \sin \varphi^3}.$$

Es ist noch r und ψ durch φ allein auszudrücken, als der einzigen messbaren Winkelgrösse. Substituirt man die vorigen Ausdrücke $\operatorname{tg} \psi = \frac{p}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi$ und $r = \frac{a \sec \psi}{\sqrt{1 + \frac{p}{a} \operatorname{tg} \varphi^2}}$

wegen $\frac{a}{p} \operatorname{tg} \psi^2 = \frac{p}{a} \operatorname{tg} \varphi^2$, so wird

$$\varrho = \frac{p}{\left(\cos \varphi^2 + \frac{p}{a} \sin \varphi^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers, worin drei unbekannte Grössen, ϱ, p und a vorkommen. Da aber das Verhältniss zweier Werthe von ϱ durch 2 Gradmessungen gegeben ist, so genügen diese für die Bestimmung von $\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$.

Die zweite Messung giebt

$$\varrho' = \frac{p}{\left(\cos \varphi'^2 + \frac{p}{a} \sin \varphi'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und damit $\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{g'}{g} = m = \left(\frac{\cos \varphi^2 + \frac{p}{a} \sin \varphi^2}{\cos \varphi'^2 + \frac{p}{a} \sin \varphi'^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

Hieraus folgt die schon von Maupertuis angewandte Formel:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\cos \varphi^2 - m^{\frac{2}{3}} \cos \varphi'^2}{m^{\frac{2}{3}} \sin \varphi'^2 - \sin \varphi^2}}$$

Beispiel:

Die französische Gradmessung gab $g = 57061$ Tois., $\varphi = 49^0 23'$ (zwischen Paris u. Amiens),

„ lappländische „ „ $g' = 57437$ Tois., $\varphi' = 66^0 20'$ (zwischen Tornea und Kittis).

Damit wird $\frac{b}{a} = 0{,}99175$ und die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{121}$.

Dieser erste Versuch gab zwar ein zu grosses Resultat, wie sich später zeigte, er entschied aber doch im Allgemeinen die Frage über die Gestalt der Erde. Die Schwedische Gradmessung wurde im Jahre 1805 von Svanberg genauer wiederholt.

Zusätze: Die jetzt als die besten Resultate geltenden Werthe sind von Bessel aus 10 verbesserten Gradmessungen berechnet (Astr. Nachr. 1841, Bd. 19, p. 97); es sind folgende:

$$a = 3272077{,}14 \text{ Tois.}$$
$$b = 3261137{,}13 \text{ „}$$

$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}1528}$ liegt nach dem mittleren Fehler zwischen $\frac{1}{294}$ und $\frac{1}{304}$.

Hiernach ist 1 geographische Meile $= \frac{2a\pi}{5400} = 3807{,}23468^T$
= 22843,40 Pariser Fuss
= 23643,00 Rheinl. Fuss
= 24345,80 Engl. oder Russ. Fuss.
= 25893,95 Hamb. Fuss;

ferner 1 geogr. Viertelmeile oder 1 Minute des Aequators
= 5910,75 Rheinl. Fuss
= 6086,44 Engl. Fuss
= 6473,49 Hamb. Fuss.

Der Minutenwerth des Meridians ist mit der Breite veränderlich, wenn man auf die Abplattung Rücksicht nimmt.

Definirt man die Seemeile als den 5400sten Theil des elliptischen Quadranten, so wird diese Seemeile (oder „Mill“) nach den obigen Angaben von Bessel $\frac{5131179{,}81}{5400}$ Toisen $= 950{,}2185$ Toisen $= 5900{,}876$ Rheinl. Fuss. Der mittlere Fehler dieser Grösse ist $\pm\ 0{,}294$ Rheinl. Fuss, zufolge des von Bessel angegebenen mittleren Fehlers von $\pm\ 498{,}23$ Mtr. bei der Länge des Quadranten. Lalande (Abrégé de Navig., Paris 1793) nahm die Seemeile als den 60sten Theil des Meridiangrades in der Breite von 45°, und erhielt damit: un mille $= \frac{57027}{60} = 950\frac{1}{2}$ Toisen. Man findet nach den obigen Daten dafür $\frac{57012{,}510}{60} = 950{,}2085$ Ts. $= 5900{,}815$ Rh. F.

Aus denselben Daten von Bessel folgt ferner:

Der Werth des Meters $= \frac{\text{Umfang des Meridians}}{\text{40 Millionen}}$

$= 443{,}332$ Pariser Linien.

Das schon früher eingeführte legale Meter ist

$= 443{,}296$ „ „

Der Quadrant des Erdmeridians würde hiernach 10000855,76 legale Meter enthalten.

Zur Vergleichung der verschiedenen Längenmasse dient im Allgemeinen die Pariser Linie, nämlich der 144ste Theil des Pariser Fusses bei 13 Réaumur auf der 6 Fuss haltenden Toise, womit die Gradmessung in Peru ausgeführt wurde (Toise de Pérou). Es ist hiernach

1 Pariser Fuss	=	144	Pariser Linien.
1 Rheinl. „	=	139,13	„ „
1 Engl. „	=	135,1142	„ „
1 Hamb. „	=	127,036	„ „*)

Der Russische Fuss stimmt mit dem Englischen, der Dänische Fuss mit dem Rheinländischen und der Schleswig-

*) Schumacher, Lage der Thürme von Hamburg. 1843.

Holsteinische Fuss mit dem Hamburger Fusse überein. Das astron. Jahrb. f. 1852 von Encke enthält ausführliche Tafeln für die Gestalt der Erde, nach Bessels Resultaten berechnet.

5) Die Gleichung der loxodromischen Linie aus ihrer Erklärung zu bestimmen, dass es die krumme Linie sein soll, welche mit allen Meridianen der Erdkugel gleiche Winkel bildet.

Auflösung: Ist für zwei benachbarte Punkte der loxodromischen Linie $d\varphi$ der Breitenunterschied, $d\lambda$ der Längenunterschied, α der constante Winkel (Curswinkel) mit den Meridianen, so wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\varphi\, d\lambda}{d\varphi}$$

die Differentialgleichung der loxodromischen Linie

oder $\dfrac{d\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{d\lambda}{\operatorname{tg}\alpha}$, woraus durch Integration die endliche Gleichung derselben folgt, nämlich

$$\log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\alpha} + \text{Const.}$$

oder $\operatorname{tg}\alpha \cdot \log\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi) = \lambda + \text{Const.}$ Die willkührliche Constante ist hier $= 0$ zu setzen, wenn λ mit φ zugleich verschwinden, also wenn die loxodromische Linie bei ihrem Durchschnitte mit dem Aequator anfangen soll.

6) Gegeben: Die Breiten und Längen zweier Oerter φ u. φ', λ u. λ'. Man sucht die Bogenlänge der loxodromischen Linie von einem Orte zum andern nebst dem constanten Winkel α, welchen diese Linie mit den dazwischen liegenden Meridianen bildet, also den Curs und die Distanz.

Auflösung: Die vorhergehende Gleichung giebt

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \log(45 + \tfrac{1}{2}\varphi) = \lambda + C$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \log(45 + \tfrac{1}{2}\varphi') = \lambda' + C$$

daher $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\lambda' - \lambda}{\log\operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi') - \log\operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi)}$

$= \dfrac{\lambda' - \lambda}{M' - M}$ zur Abkürzung. Um die Distanz s zu finden,

deren Differential $ds = d\varphi \sec\alpha$ ist, erhält man $s = \varphi \sec\alpha + C$ für den ersten Ort und $s' = \varphi' \sec\alpha + C$ für den zweiten, daher $s' - s = (\varphi' - \varphi) \sec\alpha$ für die gesuchte Distanz.

Zusatz: Die Werthe von $\log tg\,(45 + \frac{1}{2}\varphi) = M = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ sind in den nautischen Tafeln (z. B. Tab. IV v. Freeden u. Köster) unter dem Namen Meridionaltheile oder vergrösserte Breiten schon berechnet angegeben. Gerhard Mercator hatte im Jahre 1569 diejenige Projectionsart der Seekarten eingeführt, wobei die loxodromischen Linien in der Karte sich in gerade Linien verwandeln mussten, da er alle Meridiane einander parallel legte, und dabei das richtige Verhältniss der Breiten- und Längengrade durch entsprechende Vergrösserung der Breiten wieder herstellte. *) Die Berechnung dieser vergrösserten Breiten wurde zuerst sehr mühsam durch Summirung der Secanten der Breite ausgeführt im Jahre 1599 von Ed. Wright; dann als der Werth des Integrals $= \log tg\,(45 + \frac{1}{2}\varphi)$ zufällig, wie Halley glaubte, gefunden und schon 1645 in Norwoods Epitome of Navigation veröffentlicht worden war, wurde derselbe erst im Jahre 1668 von J. Gregory bewiesen in dessen Exercitationes geometricae, nachdem kurz vorher der Mathematiker Nicolaus Mercator eine Entscheidung über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit des Satzes als Gegenstand einer Preisaufgabe vorgeschlagen hatte, die er selbst zu lösen sich anheischig machte. (Vergl. Phil. Tr. 1668 und Robertson's Elements of Navigation, London 1754).

Beispiel: Es sei für Kiel, wo $\varphi = 54^0\,19'\,28''$ (die Breite des Schlossthurms und der Marineschule) M in Minuten zu berechnen, so ergiebt sich mit dem Radius der Erdkugel $= 3437{,}75'$ der Werth von $M = 3897{,}89'$.

*) Zür Geschichte dieser wichtigen Erfindung Mercator's (geb. 1512 zu Rupelmonde in Flandern, gest. 1594 zu Duisburg) sehe man vorzüglich Dr. Breusing's Vortrag: Gerhard Kremer gen. Mercator, der deutsche Geograph. Duisburg 1869.

Zusatz: Setzt man den Nenner $\log \operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi')$ $- \log \operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi) = \log \frac{\operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi')}{\operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi)}$

$$= \log \frac{1 + \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}}{1 - \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}}$$ und entwickelt dies in eine Reihe

$$= 2 \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}\right)^3 + \because \right\}$$

so entsteht, indem nur das erste Glied genommen wird, worin $\sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$ annähernd gesetzt werden kann, die s. g. Auflösung nach Mittelbreite oder

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\lambda' - \lambda) \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\varphi' - \varphi}$$

(Vgl. Encke Astron. Jahrb. f. 1842).

7) Die Meridionaltheile oder vergrösserten Breiten in der Mercator'schen Karten-Projection mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde zu berechnen.

Auflösung: Es seien x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Ortes auf der Erde, deren elliptische Meridiane die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erhalten, so wird $\frac{dx}{dy}$ $= -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x}{y} = -\operatorname{tg} \varphi$, wenn φ die geographische Breite des Ortes bedeutet. Für $a = 1$ ist daher $x^2 = \frac{1}{1 + b^2 \operatorname{tg} \varphi^2}$

Der Längenunterschied zwischen dem angenommenen und einem benachbarten Meridiane sei $= d\lambda$, so ist das Stück des Parallelkreises mit dem Aequator oder die Abweichung $= x\, d\lambda = \frac{d\lambda}{\sqrt{1 + b^2 \operatorname{tg} \varphi^2}}$. Sei s der elliptische Bogen des Meridians vom Aequator an gerechnet, also $ds = -\frac{dx}{\sin \varphi}$

$$= \frac{b^2 d\varphi}{\cos\varphi^3 (1 + b^2 \operatorname{tg}\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{ds}{x d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{b^2}{\cos\varphi [1 - (1 - b^2)\sin\varphi^2]}$$

und wenn $1 - b^2 = \varepsilon^2$ gesetzt wird, $\frac{ds}{x d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{b^2}{\cos\varphi (1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)}$

Nach der Mercator'schen Projection soll nun das Verhältniss $\frac{ds}{x d\lambda}$ in der Karte genau wie auf der Erde dargestellt werden

und dazu ist die Form gewählt: $\frac{ds}{x d\lambda} = \frac{\frac{1}{x} . ds}{d\lambda} = \frac{dM}{d\lambda}$

wenn M die Mercator'sche Projection des elliptischen Bogens s bezeichnet. Es wird demnach

$$dM = \frac{b^2 d\varphi}{\cos\varphi (1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)} = \frac{(1 - \varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^2 (1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)}$$

oder wenn man $\sin\varphi = u$ setzt, die algebraische Form

$$dM = \frac{(1 - \varepsilon^2) du}{(1 - u^2)(1 - \varepsilon^2 u^2)} = \frac{du}{1 - u^2} - \frac{\varepsilon^2 du}{1 - \varepsilon^2 u^2},$$ woraus

$$M = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + u}{1 - u} - \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1 + \varepsilon u}{1 - \varepsilon u}$$ oder

$$M = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} - \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1 + \varepsilon \sin\varphi}{1 - \varepsilon \sin\varphi}$$

als genauer Werth für die Länge des elliptischen Meridianbogens in der Mercator'schen Projection sich ergiebt, vom Aequator bis zur Breite φ gerechnet, während der elliptische Bogen selbst bekanntlich nicht durch endliche Ausdrücke von Logarithmen oder Kreisfunctionen angegeben werden kann.

Eine leichte Umformung, wegen $\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} = \operatorname{tg}^2(45 + \tfrac{1}{2}\varphi)$

giebt noch, wenn man auch $\varepsilon \sin\varphi = \sin v$ setzt:

$$M = \log \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi) - \varepsilon \log \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} v)$$

oder um M in Minuten des Aequators, dessen Radius = 3437,75 Minuten ist, zu erhalten, und sich der Briggischen Logarithmen zu bedienen:

$$M = \left\{ \frac{\log \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi)}{\log e} - \frac{\varepsilon \log \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} v)}{\log e} \right\} . 3437{,}75$$

wo $\log \varepsilon = 8{,}9122052 - 10$, nach Bessel oder $\varepsilon = \frac{1}{12{,}2404}$ als Excentricitätsverhältniss der Erdmeridiane, e die Basis der natürlichen Logarithmen, also $\log(\log e) = 9{,}6377843 - 10$ ist.

Beispiel: Für $\varphi = 54^0\,19'$ erhält man

$$M = 3897{,}09 - 18{,}60 = 3878{,}49$$

so dass der Betrag wegen Abplattung in diesem Falle $= 18{,}60'$ ist

Zusatz: Tafeln für die vergrösserten Breiten mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde berechneten die Marineofficiere Caluso mit der Abplattung $^1/_{231}$ (Mém. Turin. IV. 1790 p. 325: De la navigation sur le sphéroïde elliptique) und ausführlicher Mendoza mit der Abplattung $^1/_{320}$ (Conn. des. temps p. 1793). Die letzteren Tafeln sind seitdem auch in mehreren nautischen Büchern enthalten, z. B. in Pilaar's Handleiding tot de beschouwende en werkdadige Stuurmanskunst, Leiden 1837. Eine strenge Formel für die Berechnung ist schon von Lambert 1772 in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik entwickelt worden, die obige Formel nämlich, auf welche auch Caluso kam, und danach seine Tafel berechnete. Mendoza benutzte die Näherungsformel

$$M = \left\{\frac{\log \operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\log e} - 2\alpha \sin\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^2 \sin 3\varphi\right\} 3437{,}75$$

wo $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - b$ (für $a = 1$) die Abplattung bezeichnet, welche Formel sich aus der vorhergehenden ergiebt, wenn man $\log \frac{1 + \varepsilon \sin\varphi}{1 - \varepsilon \sin\varphi}$ in eine Reihe entwickelt, und sich dabei auf die beiden ersten Glieder $= 2(\varepsilon \sin\varphi + \frac{1}{3}\varepsilon^3 \sin\varphi^3)$ beschränkt, ferner $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2} = \sqrt{1 - (1-\alpha)^2} = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}$ substituirt, wodurch $-\frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1 + \varepsilon \sin\varphi}{1 - \varepsilon \sin\varphi} = -\varepsilon^2 \sin\varphi$ $- \frac{1}{3}\varepsilon^4 \sin\varphi^3 = -(2\alpha - \alpha^2)\sin\varphi - \frac{1}{3}(2\alpha - \alpha^2)^2 \sin\varphi^3$ $= -2\alpha \sin\varphi + \alpha^2(\sin\varphi - \frac{4}{3}\sin\varphi^3) + \ldots = -2\alpha \sin\varphi$ $+ \frac{1}{3}\alpha^2 \sin 3\varphi + \ldots$

III. Kapitel.

Correctionen einer beobachteten Höhe zur Reduction derselben auf den Mittelpunkt der Erde.

---

§ 8. Uebersicht der verschiedenen Höhencorrectionen.

1) Die Correctionen der Angabe des Instruments.
2) Die Depression des Seehorizonts oder die Kimmtiefe.
3) Die Refraction.
4) Die Parallaxe.
5) Der Halbmesser der beobachteten Gestirne. Contraction des Halbmessers durch die Refraction. Vergrösserung des Mondhalbmessers.

§ 9. Die Instrumente zum Höhenmessen der Gestirne auf dem Meere im Allgemeinen.

Da in der nautischen Astronomie der bewegliche Standpunkt des Beobachters auf dem Schiffe keine feste Aufstellung von Instrumenten zur Höhenmessung gestattet, so war die schwierige Aufgabe dargeboten, auch ohne eine solche feste Aufstellung die Höhenmessungen mit hinreichender Genauigkeit zu erlangen.

Unter den in alter Zeit angewandten Instrumenten ist zunächst das See-Astrolabium zu erwähnen, welches aus einem Ringe von Metall bestand, der zu Viertelgraden eingetheilt war. Der Ring wurde oben an einem nach allen Seiten leicht beweglichen Henkel gehalten und unten mit einem Gewichte von 5 bis 6 Pfund beschwert um ihn möglichst perpendiculär während

der Bewegung des Schiffes richten zu können. Zwei Durchmesser, ein horizontaler und ein verticaler waren feste Stäbe. Ein Dritter, um den Mittelpunkt des Ringes drehbarer Durchmesser (Alhidade*) diente zum Visiren nach dem Gestirne. Die richtige Lage des horizontalen Durchmessers konnte durch Drehung des Instrumentes um 180 Grade geprüft werden, indem man in beiden Lagen nach einem Gegenstande in horizontaler Richtung visirte.

Ferner diente zu Höhenmessungen der Sonne ein ähnliches Instrument, der Sonnenring, welcher in 45° Abstand vom oberen Punkte eine kleine Oeffnung hatte, um die Richtung der Sonnenstrahlen aufzufassen, so dass die gesuchte Höhe als Peripheriewinkel mittelst eines doppelt so grossen Bogens am Ringe gemessen werden konnte.

Ausserdem hatte man auch einen Halbkreis zu Höhenmessungen auf dem Meere, von etwa einem Fuss Durchmesser, in der Gestalt eines gewöhnlichen Transporteurs, aber bis auf Viertelgrade eingetheilt. Eine Diopter am Nullpunkte der Theilung diente als Augenpunkt, während eine andere Diopter zur Auffassung der Richtung des Gestirns auf dem Bogen zu verschieben war. Die Hälfte des Bogens, bei horizontaler Richtung des Durchmessers, wurde demnach die gesuchte Höhe.**)

Sehr allgemein wurde aber für die Höhenmessungen zur See der Gradstock oder Jacobsstab (portug. Balestilha, span. Balestilla oder Baculo de Santiago, franz. L'arbastrille oder La flèche, engl. Cross-Staff oder Fore-Staff) welcher aus zwei senkrecht auf einander verschiebbaren Stäben in der Form eines Kreuzes bestand. Der zu verschiebende Theil war kleiner, aber breiter als der andere. Letzterer, vierseitig prismatisch geformt, 3 Fuss lang, trug die Theilung bis auf Sechstel Grade oder 10 Minuten. Für kleinere Winkel, als mit dem grössten Querstücke zu messen waren, dienten 3 kleinere Querstücke für

*) Die Alhidade heisst bei Instrumenten zum Winkelmessen der bewegliche Radius oder Zähler; alhidat = numeravit (nach dem arabischen Wörterbuch von Gohlius).

**) Bion, Traité de la construction des instrum. Paris 1713.

die drei übrigen Seitenflächen des Prisma, welche die fortgesetzte Theilung trugen. Der Jacobsstab wurde mit dem einen Ende am Auge gehalten, während nach den beiden äussersten Grenzlinien des Querstücks gleichzeitig visirt werden musste, wobei das eine Ende nach dem Seehorizonte, das andere nach dem Oberrande der Sonne oder einem anderen Gestirne, dessen Höhe gemessen werden sollte, zu richten war. Die Breite der Querstücke von 1 bis 2 Zoll war hinreichend, um den übrigen Theil der Sonne zu verdecken, deren Glanz sonst für das Auge störend gewesen sein würde. Die Ablesung auf dem prismatischen Stabe gab dann die Höhe bis auf 10 Minuten an. — Das Instrument soll indischen Ursprungs gewesen sein. Seit 1497 wurde es durch Vasco de Gama in Europa bekannt.*) Es diente noch häufig bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts zu Höhenmessungen auf dem Meere. Ein auf der hiesigen Marineschule vorgezeigtes Instrument dieser Art trug die Jahreszahl 1748.

Daneben wurde aber auch demnächst der englische Quadrant oder Davis-Quadrant von Capt. John Davis**) seit 1594 bekannt. Dieser bestand aus zwei concentrischen Bogenstücken, welche sich zu 90 Graden ergänzten, so dass der eine Bogen als Fortsetzung des andern diente. Die beiden Bögen hatten zur Erleichterung der Einstellung ungleiche Radien, wie auch das Gewicht des Instrumentes durch diese Verkleinerung des einen Bogens erheblich vermindert wurde. Man gab dem zum kleineren Radius gehörigen Bogen gewöhnlich 60 Grade und dem anderen 30 Grade. Bei dem gemeinsamen Centrum der Bögen war ein offener Schlitz in einem Querstücke angebracht, durch welchen man mittelst einer auf dem grösseren oder unteren Bogen (von 30°) verschiebbaren Diopter nach dem Seehorizonte visirte, während eine zweite gleichfalls verschiebbare Diopter auf dem kleinen Bogen das Bild der Sonne nach demselben Schlitz hinführte. Die Höhe ergab sich damit als die Summe

---

*) Peschel, Geschichte der Erdkunde. München 1865. p. 349.

**) Der Entdecker der Davisstrasse beschrieb dies Instrument in einer Schrift v. J. 1594: The seaman's secrets.

zweier Bögen, von ihrer festen Verbindungslinie an gerechnet oder, der üblichen Eintheilung gemäss, erhielt man als Summe der Ergänzungsbögen zunächst die Zenithdistanz. Der Beobachter hatte während der Observation den Rücken zur Sonne gekehrt (back observation), welches den Umständen nach für vortheilhafter gelten konnte, als die Beobachtungsart, wobei das Gesicht zur Sonne hingewandt werden musste (fore observation), z. B. die Beobachtung mit dem Jacobsstab, der daher auch wohl den Namen Fore-Staff erhalten hatte.*) Die Ablesung der Eintheilung des Davisquadranten wurde mittelst Transversalen durch concentrische Bögen bis auf zwei Minuten ermöglicht.

Alle diese Instrumente sind aber weit übertroffen und daher auch nach und nach beseitigt worden durch die Reflexionsinstrumente, deren Erfindung im J. 1731 von John Hadley, einem Mechanikus in London, bekannt gemacht wurde.**) Man nannte diese Reflexionsinstrumente daher Hadley'sche Quadranten oder Octanten, obgleich schon einige Zeit vorher Thomas Godfrey, ein Glaser in Philadelphia, diese Erfindung gemacht, und sie dem Präsidenten von Pensylvanien, James Logan, im J. 1730 mitgetheilt hatte, welcher sie zur Kenntniss der Royal Society in London brachte. Letzterer bewilligte dem Erfinder Godfrey eine Belohnung von 200 Lstrl.***) Wenn es auch hiernach wahrscheinlich ist, dass die Einführung dieser Instrumente ihren Weg zuerst von Amerika nach England genommen hat, wo dieselben durch Hadley's Constructionen allgemein verbreitet wurden, so zeigte sich doch nachher, dass die Erfindung selbst schon früher in England von Newton (gest. 1726) gemacht worden war, da man die Beschreibung eines solchen Instrumentes von Newton's Hand in den nachgelassenen Papieren von Halley

---

*) Robertson, Elements of navigation. London 1754. p. 519.

**) Phil. Tr. f. 1732: The Description of a new Instrument for Taking Angles. By John Hadley, Esq., Vice-Pres. R. S. — No. 420. p. 147.

***) W. Allen: Americ. biogr. dict. Boston 1816—61; Poggendorf. Handw. I. p. 919.

fand.*) — Die Vortheile der Reflexionsinstrumente gegen alle früheren Hülfsmittel bestanden nicht nur in der Leichtigkeit und Sicherheit, womit die Beobachtung ausgeführt werden konnte, da nur nach dem einen Gegenstande visirt zu werden brauchte, während die bequeme Verschiebung der Alhidade alles übrige besorgte, sondern auch in der grösseren Genauigkeit, deren die Beobachtung nun fähig wurde, vollends da das Fernrohr gerade mit dieser Einrichtung verbunden werden konnte.

§ 10. Die Reflexionsinstrumente und ihre Correctionen.

Bei den Reflexionsinstrumenten wird eigentlich nur der Winkel gemessen, welchen zwei senkrecht zur Ebene des Instrumentes gestellte Spiegel mit einander bilden. Dieser Winkel ist aber immer die Hälfte desjenigen Winkels, den ein parallel zur Ebene des Instrumentes einfallender Lichtstrahl mit seiner, nach der successiven Reflexion in beiden Spiegeln veränderten Richtung bildet, wie sich aus dem Satze von der Gleichheit der Winkel bei jeder Spiegelung ergiebt. Bei der hierauf gegründeten Winkelmessung zwischen zwei Gegenständen wird nach dem einen Gegenstande direct visirt, während man das durch zweimalige Reflexion entstandene Bild des andern Gegenstandes in dieselbe Richtung bringt. Der so erhaltene Neigungswinkel der Spiegel gegen einander ist demnach die Hälfte des gesuchten Winkels, dessen Scheitel freilich nicht genau im Auge, sondern in dem Schnittpunkte der ersten und letzten Richtung des Strahles liegt. Um aber den auf dem eingetheilten Bogen (Limbus oder

---

*) Philos. Tr. f. 1742: A true Copy of a Paper in the Hand Writing of Sir Isaac Newton, found among the Papers of the late Dr. Halley, containing a Description of an Instrument for observing the Moons Distance from the Fixed Stars at Sea. — Halley selbst schreibt dagegen Phil. Tr. 1731 No. 21, p. 195: Since our worthy Vice President John Hadley Esq. (to whom we are highly obliged for his having perfected the Reflect. Telescope) has been pleased to communicate his most ingenious Invention of an Instrument for taking the Angles with great Certainty by Reflection (Vid. Tr. No. 420) it is more than probable that the same may be applied to taking Angles at Sea with the desired Accuracy.

Gradbogen) des Instrumentes abzulesenden Neigungswinkel der Spiegel nicht immer verdoppeln zu müssen für die Bestimmung des gesuchten Winkels, so beziehen sich die Zahlen der Eintheilung schon auf die doppelt so grossen Bogenwerthe. Demnach enthält der Spiegel-Octant, obgleich nur ein Bogen von 45°, die Theilung von 0 bis 90°, der Spiegelsextant bis 120° und der Reflexionskreis bis 720°. Der wahre Nullpunkt dieser Theilung ist ferner derjenige Punkt, auf welchen der Index oder die Alhidade zeigt, wenn die beiden Spiegel einander parallel sind.

Die Prüfungen und Correctionen zur Adjustirung des Instrumentes oder die Berechnungen des Einflusses der Fehler am Instrumente zur Verbesserung der abgelesenen Winkel ergeben sich hiernach in folgender Weise:

1) Zu untersuchen ob der grosse Spiegel (Indexspiegel) perpendikulär auf der Ebene des Instrumentes steht. Man verschiebe die Alhidade, bis der grosse Spiegel auf die Mitte des Gradbogens zeigt; auf die beiden Enden des letzteren setze man gleich hohe Diopter; sehe darauf schräge am Rande des grossen Spiegels vorbei nach der einen Diopter, welche zu Anfang des Gradbogens steht, so muss bei perpendikulärem Stande des Spiegels die andere Diopter daneben in gleicher Höhe im Spiegel erscheinen oder eine ungebrochene Linie bilden. Man kann dasselbe auch ohne Diopter, doch minder deutlich prüfen, wenn man die Theile des Gradbogens selbst, wo die Dioptern standen in gleicher Weise benutzt. Es ist nur nöthig, um den etwaigen Fehler des Spiegels recht hervortreten zu lassen, dass man nicht einander nahe Theile des Gradbogens, sondern möglichst entfernte, wie die Endpunkte, vergleicht. Durch Correctionsschrauben ist die senkrechte Stellung des grossen Spiegels zu erlangen. Der Einfluss eines Fehlers in der senkrechten Stellung des grossen Spiegels kann durch die Formel

$$dm = -2 i^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m$$

berechnet werden, wo i die Abweichung von der senkrechten Stellung des Spiegels, m der abgelesene Winkel und dm die

Correction desselben, also $m + dm = x$ den gesuchten Winkel x bedeutet. Die Correction ist hier negativ. Ist i in Sec. ausgedrückt so wird auch dm in Sec. gefunden, nachdem mit dem Werthe des Radius = 206265″ dividirt worden ist. Da nach dem grossen Spiegel auch der kleine Spiegel gestellt wird, so ist hier angenommen, dass die Neigung beider Spiegel einander gleich ist. Der einfallende und der reflectirte Strahl liegen dann in einer Ebene, welche auf beiden Spiegeln senkrecht steht, und da diese Ebene nicht parallel mit der Ebene des Instrumentes ist, so giebt die Alhidade einen grössern Winkel an, als den gesuchten, so dass die Correction dm immer negativ wird.

2) Den kleinen Spiegel senkrecht zur Ebene des Instruments zu stellen.

Hierzu bedient man sich bei Octanten gewöhnlich eines entfernten horizontalen Gegenstandes, z. B. des Seehorizonts, welcher direct und zugleich gespiegelt gesehen in einer geraden Linie erscheinen muss, wenn man das Instrument selbst nahe horizontal hält und den Index auf Null gestellt hat. Eine Abweichung hiervon wird durch die Schraube am kleinen Spiegel sogleich gehoben. Auch kann man das Bild eines hellen Sterns sehr gut dabei benutzen und bei Sextanten besonders immer das Fernrohr zu Hülfe nehmen. Die beiden Bilder des Sternes müssen sich bei dem Vorüberschieben genau decken. Eben so am Tage die beiden Bilder der Sonne. Um den Einfluss auf die Winkelmessung zu berechnen, wenn nur der kleine Spiegel nicht perpentikulär steht, lassen sich die Formeln anwenden:

$\varrho = 2i \cos \beta$ oder wenn $x = m + dm$ gesetzt wird,

$\cos x = \cos \varrho \cos m,$ $\quad dm = +\frac{1}{2} \varrho^2 \operatorname{cotg} m.$

Dabei ist x der gesuchte Winkel, m der abgelesene, i die Abweichung des Spiegels von der senkrechten Lage, β die Hälfte des constanten Winkels am kleinen Spiegel in dem Dreiecke zwischen beiden Spiegeln und dem Augenpunkte (bei Sextanten gewöhnlich $\beta = 15^{\circ}$) oder das Complement des Winkels, welchen die Ebene des kleinen Spiegels mit der Gesichtslinie (optischen Axe des Fernrohrs) bildet. Ist i und folglich auch die Hülfs-

grösse ϱ in Secunden ausgedrückt, so ist die rechte Seite der Formel für dm noch mit 206265 zu dividiren.

3) Den Indexfehler oder Collimationsfehler zu bestimmen.

Dieser Fehler besteht in der Abweichung der Alhidade vom Nullpunkte des Gradbogens in dem Falle, wo die Spiegel einander parallel sind. Die Parallelstellung der Spiegel wird erreicht, indem man entweder nach einem entfernten horizontalen Gegenstande visirt und das Instrument dabei vertical hält bis man beide Bilder zusammengebracht hat; oder auch in beliebiger Lage des Instruments, wenn man ebenso mit dem Bilde der Sonne oder eines Sternes verfährt. Will man den Indexfehler nicht durch die Correctionsschraube am kleinen Spiegel wegschaffen, sondern, was bei Sextanten vorgezogen wird, ihn mit grösserer Genauigkeit in Rechnung nehmen, so ist für den Stern die Sache am einfachsten, da die Angabe der Alhidade bei der Deckung den wahren Nullpunkt schon bezeichnet. Der Indexfehler mit seinem Zeichen + oder —, je nachdem der wahre Nullpunkt rechts oder links vom Nullpunkte des Gradbogens liegt, ist dann unmittelbar abzulesen. Die Zeichen + oder — sind als Zeichen der Correction für jeden abgelesenen Winkel anzuwenden. Für die Sonne hingegen ist die genauer zu beobachtende Berührung, der Deckung der Bilder vorzuziehen. Man bringt also die Ränder der Sonne zu beiden Seiten in Berührung und erhält als halbe Differenz der Ablesungen den Indexfehler mit dem Zeichen + oder — als Correction jedes gemessenen Winkels, je nachdem die grössere oder kleinere Zahl der Ablesung zur rechten oder linken Seite vom Nullpunkte des Gradbogens sich befand. Fielen bei einem sehr grossen Indexfehler beide Ablesungen nach derselben Seite vom Nullpunkte, so wäre die halbe Summe der Indexfehler.

4) Die optische Axe des Fernrohrs mit der Ebene des Instrumentes parallel zu stellen oder den Einfluss einer Abweichung davon zu berechnen.

Man lege das Instrument auf einen Tisch und setze zwei gleich hohe Dioptern möglichst weit von einander entfernt auf

den Gradbogen. Durch dieselben visire man nach einem äussern Gegenstande, auf welchem man ebenfalls das eingeschrobene Fernrohr richtet. Erscheint dieser Gegenstand dann in der Mitte des Fernrohrs, so steht dasselbe parallel; sonst kann man durch die beiden Correctionsschrauben an dem Träger des Fernrohrs die Richtung verbessern. — Ein zweites Verfahren die Parallelstellung des Fernrohrs zu prüfen, besteht darin, dass man einen grossen Winkel auswählt, z. B. zwischen Sonne und Mond, und diese Gegenstände in der Mitte des Gesichtsfeldes zur Berührung bringt; darauf mache man eine kleine Schwenkung mit dem Instrumente, dass dieselben Gegenstände ein Mal abwärts von der Mitte nach dem Instrumente hin erscheinen, und das andere Mal ebenso weit nach der entgegengesetzten Seite, wozu die Fäden im Fernrohr benutzt werden können. Wenn nun in beiden Lagen die Gegenstände in gleichem Abstande von einander erscheinen, so steht das Fernrohr parallel zur Ebene des Instrumentes. Hat man durch Drehung der Ocularröhre zwei gleichweit von der Mitte befindlichen Fäden mit der Ebene des Instruments nahe parallel gestellt, so kann man auch die Berührung der Winkelobjecte an dem einen Faden herstellen, worauf nach einer Schwenkung des Instruments eine eben so gute Berührung bei dem andern Faden stattfinden müsste. — Der Fehler in der Winkelmessung, wenn das Fernrohr nicht parallel zur Ebene des Instrumentes ist, könnte berechnet werden nach der Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \sin \tfrac{1}{2} m \cos i$$

wo x der gesuchte Winkel, m der abgelesene und i die Neigung des Fernrohrs gegen die Ebene des Instruments ist. Setzt man $x = m + dm$ und $\cos i = 1 - \frac{1}{2} i^2$, so wird

$$dm = - i^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m$$

also die von dem gemessenen Winkel m zu subtrahirende Correction. Ist i in Secunden ausgedrückt, so wird die rechte Seite mit 206265 dividirt, um dm gleichfalls in Secunden zu erhalten. Zur Ersparung der kleinen Rechnung findet sich auch der Werth von dm in den nautisch-astronomischen Tafeln z. B. in Tab. 35

der Bowditch'schen Sammlung. — Die Neigung i des Fernrohrs lässt sich auch aus der Formel berechnen:

$$i = \frac{dm}{2\varrho \operatorname{tg} \frac{1}{2} m}$$

wo m der abgelesene Winkel, ϱ der Abstand der beiden obigen Fäden von einander, welche sich gleichweit von der Mitte befinden, und dm die Differenz der Ablesungen bei der Berührung der Winkelobjecte an diesen Fäden bezeichnet. Um i in Secunden zu erhalten, wenn dm und ϱ gleichfalls in Secunden ausgedrückt sind, ist die rechte Seite dieser Formel mit dem Werthe des Radius = 206265 Sec. zu multipliciren.

5) Die farbigen Gläser zur Dämpfung des starken Lichtes, besonders der Sonne, können in Beziehung auf den Parallellismus ihrer Flächen am leichtesten geprüft werden, wenn sie in ihrer Fassung eine Drehung um 180 Grade gestatten. In beiden Positionen müsste z. B. eine Berührung der Sonnenbilder nicht verändert erscheinen. Bei Sonnenbeobachtungen wird übrigens der etwaige Fehler der farbigen Gläser unschädlich, wenn man den Indexfehler mit denselben Gläsern bestimmt, womit die Winkelmessung gemacht ist.

6) Sind die beiden Flächen des grossen Spiegels nicht parallel zu einander, so entsteht bei Octanten und Sextanten ein mit der Grösse des Winkels zunehmender Fehler in der Winkelmessung, welcher sich dadurch erkennen lässt, dass man den Spiegel aus seinem Rahmen nimmt und ihn in entgegengesetzter Lage wieder einstellt, so dass die rechte und linke, die obere und untere Seite vertauscht werden, und in dieser neuen Stellung die Winkelmessung wiederholt. Eine vollständige Berücksichtigung aller möglichen Lagen, welche die beiden Flächen gegen einander haben können, würde eine zu verwickelte Rechnung geben. — Sind bei dem kleinen Spiegel die Seitenflächen nicht parallel, so entsteht wegen der unveränderten Richtung der Strahlen nur ein constanter Fehler, welcher auch im Indexfehler

sich wiederholt, und daher unschädlich wird. — Wegen der doppelten Bilder ist zu bemerken, dass das schwächere Bild von der Vorderseite des Glases herrührt und nicht mit dem helleren Bilde zu verwechseln ist. Metallspiegel, welche nur eine spiegelnde Fläche haben, wären vortheilhafter als Glasspiegel, wenn sie nur gegen die Oxydation in der Seeluft geschützt werden könnten.

Die Reflexionskreise, welche in der nautischen Astronomie zur Anwendung kommen, sind die Kreise von Borda und Pistor (Martins). Der Borda'sche Kreis*) hat die winkelmessenden Radien oder Alhidaden beide beweglich und von einander unabhängig. Er gestattet daher eine wiederholte Messung (Repetition der Winkelmessung), indem man von einem beliebigen Punkte ausgehen kann, für welchen man die Spiegel, durch Verschiebung der andern Alhidade bis zur Coincidenz der Bilder eines Gegenstandes einander parallel stellt. Die Ablesung dieser Stellung dient als der wahre Nullpunkt. Darauf wird das zweite Winkelobject zur Deckung mit dem ersten gebracht; aber ohne diese Position abzulesen, kann man gleich weiter gehen, und durch Verschieben der ersten Alhidade wieder die Spiegel parallel stellen; dann die Winkelmessung wiederholen u. s. w., so dass z. B. nach dreimaliger Wiederholung die Ablesung der letzten Stellung des Nonius den zu messenden Winkel in dreifacher Grösse giebt, wenn man die ursprüngliche Ablesung des wahren Nullpunktes subtrahirt. Mit grösserer Genauigkeit als bei einer einzelnen Beobachtung wird man demnach durch die Division mit der Anzahl der Wiederholungen die gesuchten Winkel erhalten, wenn die Bewegung der Alhidaden völlig unabhängig von einander vor sich geht. Ein Indexfehler ist durch die jedesmalige Parallelstellung der Spiegel nicht vorhanden.

Der Reflexionskreis (Patentkreis) von Pistor und Martins in Berlin, besonders seit 1845 durch Schumacher**) allgemeiner

*) Description et usage du cercle de réflexion. Paris 1787. Borda, gest. 1799, war Capitain in der franz. Flotte, zuletzt Divisionschef im Marineministerium.

**) Astron. Nachr. 1845. Bd. 23.

bekannt geworden, hat wie der Sextant nur eine bewegliche Alhidade. Statt des kleinen Spiegels dient aber ein Prisma*) zur Reflexion der Bilder, welche dadurch deutlicher werden. Ueber dem Prisma ist statt eines durchsichtigen Glases der freie Raum zum Visiren nach dem direct gesehenen Gegenstande. Der Indexfehler wird auf dieselbe Weise wie bei den Sextanten bestimmt, auch unterscheidet sich das ganze Verfahren der Winkelmessung überhaupt nicht von Sextantenbeobachtungen. Der Hauptvortheil eines Kreises besteht aber darin, dass der bei den Sextanten nicht wegzubringende Excentricitätsfehler hier durch Nonien, welche um 180° einander gegenüberstehen, vermieden wird, wenn man das Mittel aus beiden Ablesungen nimmt. Auch wurden diese Kreise von Martins in solcher Dimension angefertigt, dass sie den Preis der Sextanten nicht übersteigen, und damit war wenigstens ein Hinderniss ihrer Einführung beseitigt.

Bei der Winkelmessung zwischen terrestrischen Gegenständen kann noch die Parallaxe des Instruments (Spiegelparallaxe) in Betracht kommen. Der gemessene Winkel ist bei Reflexionsinstrumenten immer nur der doppelte Neigungswinkel der beiden Spiegel gegen einander, und die von den Objecten ausgehenden Schenkel des auf diese Weise gemessenen Winkels verlegen den Scheitel desselben nach dem veränderlichen Durchschnittspunkte der beiden Linien, von denen die eine die Gesichtslinie nach dem direct gesehenen Gegenstande, die andere Linie aber von dem zweiten Gegenstande durch die Drehungsaxe des grossen Spiegels gezogen ist. Am einfachsten ist es, diesen veränderlichen Scheitel auf die Drehungsaxe selbst oder die Mitte des grossen Spiegels zu reduciren. Denkt man sich von dem grossen Spiegel eine Linie nach dem direct gesehenen Objecte gezogen, so bildet diese Linie mit der verlängerten optischen Axe des Fernrohrs die gesuchte Parallaxe, welche also

*) Prismen statt der Spiegel finden sich auch schon bei dem Octanten von Caleb Smith, welcher bald nach dem Hadley'schen Octanten entstanden sein wird. Beide Prismen hatten eine gemeinsame Drehungsaxe, aber nur das eine war beweglich mit der Alhidade. Man observirte, rückwärts zu den Objecten gekehrt, jedes durch einfache Reflexion.



zu dem abgelesenen Winkel immer zu addiren ist. Ist A das direct gesehene Object, S der grosse Spiegel, SR ein Loth von demselben auf die optische Axe, so wird die Parallaxe p bestimmt durch die Formel:

$$\sin p = \frac{SR}{AR} \text{ oder } p = \frac{SR}{AR} . 206265$$

B e i s p i e l. Die Entfernung des direct gesehenen Gegenstandes war 1000 Fuss,

die Linie SR = 2 Zoll = $\frac{1}{6}$ Fuss, so wird p = 34″.

Umgekehrt könnte man das Instrument z. B. den Sextanten auch ungefähr genähert als D i s t a n z m e s s e r anwenden, indem man an einem terrestrischen Gegenstande den Indexfehler durch Deckung der Bilder bestimmt, und mit demjenigen Indexfehler vergleicht, welchen man aus weit entfernten Gegenständen z. B. den Gestirnen erhalten hat.

Zur Ablesung der sehr kleinen Theile des Winkels dienten in der älteren Zeit die T r a n s v e r s a l e n, wie wir sie noch ähnlich auf den s. g. verjüngten Maasstäben besitzen. Im Jahre 1611 gab Clavius *) ein einfacheres und genaueres Verfahren an, durch Vergleichung der Theile zweier gleichen Linien oder Längen, welche in eine ungleiche Anzahl gleicher Theile getheilt sind, mittelst Coincidenz der Theilstriche den Stand dieser Linien oder Bögen gegen einander abzulesen. Diese Vorrichtung wird jetzt V e r n i e r oder N o n i u s genannt; die erste Benennung nach Pierre Vernier**) (Petrus Vernerus, wahrscheinlich Peter Werner) welcher im Jahre 1631 dasselbe für die Messinstrumente zweckmässig anzuwenden lehrte; der Name Nonius nach Pedro Nunez***), dessen 1542 beschriebene Einrichtung zur Messung kleiner Bogentheile freilich keine Aehnlichkeit mit dem Nonius hat, da er nicht zwei, sondern eine Menge von concentrischen

*) Astrolabium. Mogunt. 1611; (Pezenas): Astronomie des Marins. Avignon 1766 p. 83.

**) La constr. etc. du quadrant. Bruxelles 1631; Kästner, Astr. Abh. II. p. 181.

***) De crepusculis, Olysipone 1542; Poggend. Wörterb. II. p. 304; Kästner l. c.

Bögen in verschiedene gleiche Theile theilt, wonach die Alhidade mit einem der Theilstriche am besten stimmen musste.

§ 11. Die Depression des Seehorizonts oder die Kimmtiefe.

Ist x der Winkel, von welchem die Richtung der Gesichtslinie nach dem Seehorizonte von der genau horizontalen Richtung abweicht, also die Depression des Horizonts oder die Kimmtiefe, so giebt das Dreieck zwischen dem Auge des Beobachters, dem Mittelpunkte der Erde und dem Berührungspunkte der Gesichtslinie mit der Erdoberfläche die Formeln, worin r den Erdradius, h die Erhöhung des Auges ist:

$$\cos x = \frac{r + h}{r}, \sin x = \frac{\sqrt{2rh + h^2}}{r + h}$$

und wegen der Kleinheit von h gegen r wird der kleine Winkel x hinreichend nahe:

$$x = \frac{\sqrt{2rh}}{r}$$

Um x in Minuten auszudrücken, ist mit 3437,75 zu multipliciren, und da $r = \frac{5400}{2\pi} = 859{,}436$ g. M., auch 1 g. M. = 23643,0 Rhn. Fuss, so wird

$$x = 1{,}0785 \sqrt{h}$$

wenn h in Rhn. Fuss ausgedrückt ist. Wegen der terrestrischen Refraction wird aber die Gesichtslinie, welche als Tangente zur Erdkugel angenommen ist, da sie von der Erdoberfläche zum höher gelegenen Orte des Auges fortschreitet, in der Regel ihre concave Seite der Erde zuwenden, so dass die berechnete Kimmtiefe zu gross ist. Man vermindert sie nach der mit vielen Beobachtungen übereinstimmenden Untersuchung von Lambert um $\frac{1}{13} = 0{,}08$ ihres vorher berechneten Werthes und erhält damit:

$$x = 0{,}9956 \sqrt{h}$$

In der Anwendung ist es daher auch gerechtfertigt, einfach die Quadratwurzel aus der in Fussmaass ausgedrückten Höhe des Auges für die in Minuten gesuchte Kimmtiefe zu nehmen,

namentlich auch wegen der Unsicherheit der terrestrischen Refraction. Uebrigens findet sich die Kimmtiefe in allen nautischen Tafeln z. B. in Bremiker's Jahrb. Taf. X.

Wenn der Horizont nicht frei, sondern durch eine Strandlinie in der Entfernung E begrenzt ist, auf welche man die gemessene Höhe eines Gestirns bezogen hat, so wird in dem schiefwinkligen Dreiecke zwischen dem Auge, dem Mittelpunkte der Erde und dem Punkte der Strandlinie das Complement des Winkels am Auge die gesuchte Kimmtiefe x. Man erhält aus diesem Dreiecke, dessen 3 Seiten r, r + h und E sind, während der Winkel dieses Dreieckes am Mittelpunkte der Erde, gleichfalls in Minuten ausgedrückt, nahe genug die Grösse E hat,

$\operatorname{cotg} x = \frac{r \sin E}{r + h - r \cos E}$ oder $\operatorname{tg} x = \frac{h}{r \sin E} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} E$, und genähert $\frac{x}{3437} = \frac{h}{r.\frac{E}{3437}} + \frac{1}{2} \frac{E}{3437}$ oder $x = \frac{h}{rE} (3437{,}75)^2 + \frac{1}{2} E$ in Minuten.

Für r in Rhnl. Fuss, E in Minuten daher $x = \frac{h \text{ Fuss}}{E \text{ Min.}} \cdot 0{,}5826 + \frac{1}{2} E$ in Minuten.

Oder mit Rücksicht auf die Verminderung des berechneten Abstandes um $\frac{1}{13}$ der Entfernung E wegen der terrestrischen Refraction:

$$x = \frac{h}{E} \cdot 0{,}5826 + E . 0{,}42$$

Eine Tabelle dazu ist u. a. Tab. XII in den naut. Taf. von Dr. Breusing.

Die Correction für Kimmtiefe fällt weg bei Beobachtungen mit einem s. g. künstlichen Horizonte, indem man dabei die doppelte Höhe durch Reflexion auf einer genau horizontalen Fläche gemessen hat. Dann ist zuerst nur für den Indexfehler

zu berichtigen, hierauf zu halbiren, wonach die Correctionen für Refraction u. s. w. folgen.

§ 12. Die Refraction.

Nach dem allgemeinen Gesetze der Brechung der Lichtstrahlen bei dem Uebergange derselben von einem durchsichtigen Medium zum andern von verschiedener Dichtigkeit, ist der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels in einem constanten Verhältnisse, entsprechend dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten womit sich das Licht in beiden Medien fortpflanzt. Der einfallende und der gebrochene Strahl liegen mit dem Einfallslothe in einer Ebene. Geht der Lichtstrahl also in ein dichteres Medium, so wird er nach dem Einfallslothe hin gebrochen, bei dem umgekehrten Wege aber von dem Lothe abgelenkt.

Für den Uebergang des Lichtstrahls eines Gestirns in die Atmosphäre der Erde ist das Einfallsloth die Richtung nach dem Zenith, der Brechungswinkel die scheinbare Zenithdistanz $= z$, der Einfallswinkel die wahre Zenithdistanz $= z + \varrho$, wenn ϱ den Betrag der astronomischen Refraction bezeichnet, daher

$$\frac{\sin(z + \varrho)}{\sin z} = \text{const.}$$

Obgleich die Atmosphäre nicht gleichförmig dicht ist, sondern die unteren Schichten bedeutend an Dichtigkeit zunehmen, so dass die Lichtstrahlen nicht einmal, sondern wiederholt gebrochen werden und daher in einer Curve zum Auge gelangen, deren Tangente hier die scheinbare Richtung des Gestirns angiebt, so hat man doch (mit Cassini, 1655) eine mittlere Dichtigkeit der Atmosphäre vorläufig dafür substituiren und so das obige Brechungsgesetz als erste Näherungsformel anwenden können. Zu einer andern Zenithdistanz z' gehöre die Refraction ϱ', so dass $\frac{\sin(z + \varrho)}{\sin z} = \frac{\sin(z' + \varrho')}{\sin z'}$ oder $\cos \varrho + \text{cotg}\, z \sin \varrho = \cos \varrho' + \text{cotg}\, z' \sin \varrho'$ wird. Da aber die Refraction immer ein sehr kleiner Winkel ist, der die Grösse eines halben Grades auch im äussersten Falle wenig überschreitet, so kann

man den Cosinus dieses Winkels = 1 setzen und für den Sinus den Bogen selbst nehmen. Das giebt:

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} z'}$$

oder die Refractionen verhalten sich genähert wie die Tangenten der Zenithdistanzen. Hiernach ist nur die Kenntniss einer Refraction nöthig, z. B. für $z' = 45^0$, wo $\operatorname{tg} z' = 1$ ist, und $\varrho' = 57'', 7$ durch Beobachtungen gefunden wurde, um den Betrag der Refraction ϱ für die Zenithdistanz z zu berechnen nach der Formel

$$\varrho = 57'',7 \operatorname{tg} z = 57'',7 \operatorname{cotg} h$$

wo $h = 90 - z$ die scheinbare Höhe ist. Die nach dieser ersten Näherungsformel berechneten Refractionen stimmen zwar bis zu 20° Höhe herab mit den Beobachtungen noch auf eine Secunde überein; geben dann aber durchweg zu grosse Resultate, so dass man dem wahren Werthe viel näher gekommen ist, indem man in derselben Formel die Zenithdistanzen um den dreifachen Betrag der Refraction vermindert hat. Dies entspricht der Formel von Bradley (1760):

$$\varrho = 57'',7 \operatorname{tg} (z - 3\varrho) = 57'',7 \operatorname{cotg} (h + 3\varrho)$$

welche noch bei 5° Höhe nur einige Secunden von den Beobachtungen abweicht.

Eine nach dieser oder einer andern Formel berechnete Refractionstafel setzt noch einen bestimmten Zustand der Atmosphäre voraus, einen mittleren Barometer- und Thermometerstand, und heisst daher die mittlere Refraction.

Das Barometer misst den Luftdruck, welcher der Dichtigkeit der Luft und damit auch der Refraction selbst proportional gesetzt wird, so dass, wenn B der Barometerstand für die Refraction ϱ, $B + \triangle B$ derjenige für die Refraction ϱ' ist, $\varrho : \varrho' = B : B + \triangle B$ oder $\varrho' = \varrho . \frac{B + \triangle B}{B}$, mithin ist

$$\frac{B + \triangle B}{B}$$

der von dem Stande des Barometers abhängige Correctionsfactor der Refraction.

Die Refraction ist ferner von der Temperatur der Luft abhängig, weil mit der Temperatur die Ausdehnung der Luft sich ändert, also auch ihre Dichtigkeit. Es ist nach Tob. Mayer (1753) in naher Uebereinstimmung mit Bessel (Tab. Reg. 1830) anzunehmen, dass die Luft sich um $\frac{1}{220}$ ihres Volumens ausdehnt für jeden Grad, den das Réaumur'sche Thermometer steigt. Da die Volumina sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten, also auch nahe umgekehrt wie die Refractionen verhalten, so wird $\varrho : \varrho' = 1 + \frac{\Delta t}{220} : 1$, wenn die Temperatur für die Refraction ϱ' um Δt Grade des Réaumur-Thermometers verschieden ist von der Temperatur für die Refraction ϱ; oder es ist $\varrho' = \varrho . \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{220}}$, folglich der vom Thermometerstande abhängige Correctionsfactor der Refraction:

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{220}}$$

Alles zusammengenommen erhält man die Refraction nach der Formel:

$$\varrho = 57'',7 \ \text{cotg.} \ (h + 3 \varrho) . \frac{B + \Delta B}{B} . \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{220}} .$$

In der Refractionstafel von Bessel ist der mittlere Barometerstand $B = 29,6$ Engl. Zoll $= 27$ Zoll $9\frac{1}{2}$ Lin. Pariser Maass, und der mittlere Thermometerstand $t = 48^0, 9$ F. $= + 7^0, 5$ R. In Tafel IX der Tabellen von Domke ist $t = 50^0$ F., $B = 29,6$ Engl. Zoll. Tab. IX giebt die mittlere Refraction, Tab. XIII die Correctionen für Barometer- und Thermometerstand und Tab. XIV dient zur Verwandlung der Barometer- und Thermometerscalen. Die Tafeln VII, VIII und IX im Naut. Jahrb. von Dr. Bremiker enthalten die mittlere Refraction und die Correctionen für Barometer und Thermometer.

Wird die Refraction ϱ von der beobachteten oder scheinbaren Höhe subtrahirt, so ist $h - \varrho$ die verbesserte oder wahre Höhe.

Ueber den Betrag der Refraction hat erst im 16. Jahrhundert Tycho Brahe Untersuchungen angestellt, welche die erste Refractionstafel lieferten.

Die astronomische Refraction ist u. A. bestimmt worden durch Beobachtung der Höhe von Circumpolarsternen bei ihrem höchsten und niedrigsten Stande, wo das eine Mal die Refraction sehr gross, das andere Mal sehr klein werden kann, und ohne Refraction doch gleiche Polardistanz stattfinden müsste.

Die terrestrische Refraction konnte durch Beobachtung der gegenseitigen Zenithdistanzen zweier in bekannter sehr weiter Entfernung von einander befindlichen terrestrischen Signale bestimmt werden. Ohne terrestrische Refraction müsste die Summe dieser beiden Zenithdistanzen, vermindert um den Winkel, welchen die Lothlinien der beiden Oerter mit einander bilden, 180 Grad betragen. Diese Summe wird aber um den Betrag der terrestrischen Refraction zu klein gefunden, und das Resultat ist geworden, dass die terrestrische Refraction des Seehorizonts durchschnittlich $\frac{1}{13}$ der Entfernung desselben oder der Kimmtiefe beträgt (nach Lambert). Delambre fand $0{,}0783 = \frac{1}{12{,}8}$ aus 17 Beobachtungen (Astron. III p. 576); doch kommen dabei auch sehr abweichende Resultate vor, ausnahmsweise selbst negative Werthe, welche die Abhängigkeit der terrestrischen Refraction von besonderen Luftzuständen andeuten. Die astronomische Refraction ist ebenfalls bei sehr niedrigen Höhen unsicher zu bestimmen und vermischt sich daselbst mit der terrestrischen Refraction. Die Beobachtung sehr niedriger Höhen wird daher für Orts- und Zeitbestimmungen, wenn es möglich ist, vermieden.

Für das Gedächtniss lässt sich der ungefähre Betrag der astronomischen Refraction aus der folgenden Uebersicht entnehmen:

Höhe =	0°	5°	25°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
Refr. =	35′	10′	2′	1′	50″	30″	20″	10″	0″.

§ 13. Die Parallaxe.

Ist a der Halbmesser der Erdkugel, Δ und Δ' die Entfernung des Gestirns vom Erdmittelpunkte und vom Beobachtungsorte, P die Horizontalparallaxe, p die Höhenparallaxe, so geben die Dreiecke zwischen Gestirn, Erdmittelpunkt und Beobachtungsort: $\frac{a}{\Delta} = \sin P$ und $= \frac{\sin p}{\cos h}$, wenn h die beobachtete oder scheinbare Höhe ist. Hieraus folgt:

$$\sin p = \sin P.\cos h \text{ oder } p = P \cos h$$

also die Horizontalparallaxe multiplicirt mit dem Cosinus der scheinbaren Höhe giebt die Höhenparallaxe. Die Vertauschung des Sinus mit dem Bogen ist gestattet, da P selbst bei dem Monde die Grösse eines Grades wenig überschreiten kann. Die wahre Höhe h′ wird nach demselben Dreiecke durch Addition der Höhenparallaxe gefunden:

$$h' = h + p$$

womit die Höhe des Gestirns auf den Mittelpunkt der Erdkugel reducirt ist. Diese Reduction ist nothwendig, da auch die anderen Winkelgrössen z. B. die Declination des Gestirns für den Mittelpunkt der Erde gegeben sind.

Die Hülfstafeln zur Ersparung dieser kleinen Rechnung sind gewöhnlich für scheinbare Höhen eingerichtet, z. B. Taf. 6 (Middelboe) für die Sonne, Taf. 15 für die Planeten, Taf. 17 für den Mond. Sollte daher aus einer gegebenen wahren Höhe und der bekannten Horizontalparallaxe die Höhenparallaxe aus einer solchen Tafel entnommen werden, so ist die Parallaxe vorläufig mit der wahren Höhe zu suchen, daraus durch Subtraction die scheinbare Höhe zu bilden und hiermit wieder der Parallaxenwerth aufzusuchen. Die directe Rechnung würde geben $\sin p = \sin P \cos (h' - p)$, woraus

$$\tang p = \frac{\sin P \cos h'}{1 - \sin P \sin h'} \text{ oder } p = P \cos h' + \frac{P^2}{2} \sin 2\,h'$$

und wenn P in Secunden ausgedrückt ist, so ist der letzte Theil der

Näherungsformel noch mit 206265 zu dividiren oder mit sin 1″ zu multipliciren.

Eine Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Höhenparallaxe kommt nur für die genauesten Berechnungen von Mondsbeobachtungen zur Anwendung. Es sei r der Erdradius oder die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der abgeplatteten Erde, a der Halbmesser des Aequators, Δ die Entfernung des Mondes vom Mittelpunkte der Erde, P die gegebene Horizontalparallaxe für den Aequator, P′ die locale Horizontalparallaxe, nämlich in Beziehung auf r, dann ist nach § 7, Aufg. 2, der Werth $\frac{r}{a}$ zu bestimmen und ferner ergiebt sich: $\sin P = \frac{a}{\Delta}$, $\sin P' = \frac{r}{\Delta}$, also $\sin P' = \sin P . \frac{r}{a}$ oder

$$P' = P . \frac{r}{a}$$

hieraus findet sich für eine beobachtete Meridianhöhe h die Höhenparallaxe

$$p = P' \cos (h + \varphi - \psi)$$

wo $\varphi - \psi$ der Unterschied zwischen der geogr. und geocentr. Polhöhe ist, und es wird

$$h + p = h'$$

die auf den Mittelpunkt der abgeplatteten Erde reducirte oder wahre Meridianhöhe. Aus den nautischen Tafeln z. B. Taf. XX (Domke) ist der Werth von P′ durch die Reduction P — P′ mit der Breite φ des Beobachtungsortes und der gegebenen Aequatorial-Horizontalparallaxe P für den Mond schon berechnet zu entnehmen. Z. B. für $\varphi = 54^{0}\,19'$ und $P = 62'$ wird $P - P' = 8'',3$ also $P' = 61'\,51'',7$ übereinstimmend mit der obigen Formel für die Abplattung $= \frac{1}{300}$.

Wäre umgekehrt für eine gegebene wahre Meridianhöhe h′ die Höhenparallaxe p zu bestimmen, so hätte man ähnlich wie vorhin:

$$\sin p = \sin P' \cos(h' + \varphi - \psi - p), \quad \operatorname{tg} p = \frac{\sin P' \cos(h' + \varphi - \psi)}{1 - \sin P' \sin(h' + \varphi - \psi)},$$

folglich

$$p = P' \cos(h' + \varphi - \psi) + \frac{P'^2}{2} \sin 2(h' + \varphi - \psi) . \sin 1'' \text{ *)}$$

Ist die Höhe h des Mondes nicht im Meridiane beobachtet und ist A das gegebene Azimuth dieses Gestirns, so kann man die Höhenparallaxe p hinreichend nahe nach der Formel berechnen

$$p = P' \cos(h + [\varphi - \psi] \cos' A)$$
$$h + p = h'$$

und wenn auch hier für den umgekehrten Fall, dass die wahre Höhe h' gegeben wäre, die letztere eingeführt werden soll, so hat man

$$\sin p = \sin P' \cos(h' + (\varphi - \psi) \cos A - p), \text{ woraus}$$

$$\operatorname{tg} p = \frac{\sin P' \cos(h' + (\varphi - \psi) \cos A)}{1 - \sin(h' + (\varphi - \psi) \cos A)} \text{ oder genähert:}$$

$$p = P' \cos(h' + (\varphi - \psi) \cos A) + \frac{P'^2}{2} \sin 2(h' + (\varphi - \psi) \cos A) \sin 1''.$$

In den meisten Fällen wird aber in der nautischen Astronomie die Abplattung der Erde mit Recht nicht berücksichtigt, da die entsprechenden Correctionen viel kleiner sind, als die unvermeidlichen Fehler der Beobachtungen.

Die älteste Bestimmung einer Horizontalparallaxe ist die des Mondes, welche von Ptolemaeus im 2. Jahrh. nach Christ. Geb. zu Alexandrien ausgeführt wurde. Er bediente sich der „Methode der grössten Breiten“ und fand für die Entfernung des Mondes 59 Erdhalbmesser. Hätte der Mond nämlich keine merkliche Parallaxe gehabt, so würde er bei seinem höchsten

*) Hiernach wäre eine Parallaxenformel in Brünnow's Sphär. Astron. (p. 97, 1. Aufl.; p. 157, 2. Aufl.) zu berichtigen, welche nur das erste Glied enthält, während zu dem eingliedrigen Ausdrucke die scheinbare Höhe oder Zenithdistanz, statt der wahren, eingeführt werden müsste.



Stande in Alexandrien (31° N. Br.), wo er nahe bei dem Zenith durch den Meridian ging, eben so weit nördlich von der Ekliptik sich gezeigt haben, wie bei seinem niedrigsten Stande südlich von der Ekliptik, wenn der Mond sich in einer Ebene um die Erde bewegt. Die Beobachtungen erforderten aber zur Herstellung der gleichen grössten Breiten des Mondes den entsprechenden Werth der Entfernung und damit die Bestimmung der Horizontalparallaxe des Mondes. Andere Methoden zur Parallaxenbestimmung des Mondes kamen später zur Anwendung, wozu auch die directen Messungen der Meridianhöhe des Mondes an zwei möglichst weit von einander entlegenen Standpunkten gehört z. B. im Jahre 1750 die Beobachtungen des Mondes in Berlin und am Cap der guten Hoffnung.

Die Parallaxe der Sonne zeigte sich so klein, dass sie nach der Methode des Ptolemaeus nicht merklich wurde. Verschiedene andere Versuche im Alterthume zur Bestimmung der Sonnenparallaxe erwiesen sich ebenfalls zu ungenau für die praktische Ausführung z. B. die Methode von Aristarch (280 v. Chr.) durch Messung einer Winkeldistanz zwischen Mond und Sonne, wenn der Mond genau zur Hälfte erleuchtet war; oder die Methode von Hipparch (150 v. Chr.) aus der Messung der Grösse des Erdschattens bei einer Mondfinsterniss. Man erhielt nur einen sehr ungefähren Grenzwerth, dass die Sonne z. B. wenigstens 20 mal weiter als der Mond entfernt sein müsse, während es jetzt bekannt ist, dass die Sonne ungefähr 400 mal so weit als der Mond von der Erde entfernt ist. Aber noch im 17. Jahrhundert konnte Kepler *) nur die Vermuthung aussprechen, dass ein Werth von 3 Minuten für die Horizontalparallaxe der Sonne zu gross sein müsse, da die den Umständen nach grössere Parallaxe des Planeten Mars sich sonst nicht so unmerklich klein gezeigt haben würde. Vorzüglich aber waren es zunächst die Beobachtungen des Planeten Mars im Jahre 1672 zu Cayenne und Paris, wodurch die Horizontal-Parallaxe der Sonne auf 9 bis 10 Secunden herabgebracht wurde. Verschiedene andere

*) Epit. Astr. Copern. p. 479.

Beobachtungen bestätigten einen so kleinen Werth der Sonnenparallaxe z. B. auch im Jahre 1751 die Beobachtungen des Planeten Mars in Berlin und am Cap der guten Hoffnung, welche für den Planeten die Hor.-Par. = 27″ und damit nach den Kepler-schen Gesetzen für die Sonne 10″ ergaben. Entscheidend für die schärfere Bestimmung wurden aber die Beobachtungen des Vorüberganges des Planeten Venus vor der Sonnenscheibe in den Jahren 1761 und 1769, welche gleichzeitig an weit von einander entfernten Punkten der Erdoberfläche angestellt worden sind. Cook's erste Reise um die Erde war hauptsächlich zu dem Zwecke veranlasst worden, auf einer günstig gelegenen Insel der Südsee, wozu er Otaheiti wählte, den Venusdurchgang von 1769 zu beobachten. Die Vertheilung anderer Beobachtungsstationen erstreckte sich selbst bis zum Nordcap. Die verschiedene Dauer des beobachteten Vorüberganges des Planeten vor der Sonnenscheibe an verschiedenen Beobachtungsörtern erforderte zur Uebereinstimmung der Beobachtungen einen sehr genauen Werth des Verhältnisses der Parallaxen der Sonne und des Planeten. Die Berechnung der Sonnenparallaxe wurde hieraus nach Encke = 8″,57. Eine neuere Wiederholung derselben Rechnung mit den jetzt besser bestimmten geographischen Positionen einiger Beobachtungsörter giebt nach Dr. Powalky*) die Hor.-Par. der Sonne = 8″,86 und damit die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne = 20008080 geogr. Meilen. Dies Resultat stimmte auch sehr gut mit verschiedenen andern neuen directen und indirecten Ergebnissen über die Sonnenparallaxe. Die nächsten Vorübergänge des Planeten Venus vor der Sonne finden statt in den Jahren 1874 den 8. Decbr. und 1882 den 4. Decbr., zu deren Beobachtung wohl neue grosse Expeditionen zu erwarten sind.

Die Horizontalparallaxe der Planeten ergab sich im allgemeinen aus der Horizontalparallaxe der Sonne und den bekannten Entfernungen der Planeten nach den Kepler'schen Gesetzen. Die Verhältnisse der Entfernungen der Planeten von der Sonne

---

*) Neue Untersuchung des Venusdurchganges von 1769 zur Bestimmung der Sonnenparallaxe. Kiel 1864.

wurden erst seit Copernicus (1543) bekannt, wonach man aus dem Dreiecke zwischen Sonne, Planet und Erde das Verhältniss berechnen konnte, indem der Winkel an der Erde durch die Beobachtung und der Winkel an der Sonne durch die Bewegung des Planeten gegeben war.

Eine Uebersicht der kleinsten und grössten Werthe der Horizontalparallaxe und der entsprechenden Entfernungen von der Erde für diejenigen Gestirne, welche in der nautischen Astronomie vorkommen, ist in der folgenden Tafel enthalten:

Gestirn.	Horizontal-Parallaxe.	Entfernung v. d. Erde in geogr. M.
Sonne	8″,71 bis 9″,01	20343600 bis 19672515
Mond	53′ 48″ „ 61′30″	54919 „ 48044
Venus	4″,94 „ 32″,45	36 Mill. „ 5½ Mill.
Mars	3,20 „ 21,93	55 „ 8 „
Jupiter	1,33 „ 2,16	133 „ 82 „
Saturn	0,77 „ 1,04	229 „ 170 „

Die Fixsterne zeigen eine so geringe Parallaxe, dass selbst ihre jährliche Parallaxe, wobei der Erdbahnhalbmesser (statt des Erdhalbmessers) als Basis dient, im Falle des bis jetzt bekannten grössten Werthes nur 1 Secunde geworden ist. Bei diesem für den Stern α Centauri gefundenen Resultate wird daher die Entfernung des Fixsterns 206265 mal 20 Millionen Meilen, und das Licht, welches in 8′ 18″ von der Sonne bis zur Erde fortgepflanzt wird, würde erst in 3¼ Jahren von dem Sterne bis zur Sonne oder Erde gelangen.

§ 14. Der Halbmesser der Gestirne.

In der nautischen Astronomie sind die Halbmesser der Gestirne gegebene Winkelgrössen, deren Scheitel am Mittelpunkte

der Erde gedacht wird, und deren einer Schenkel nach der Mitte des Gestirns, der andere als Tangente nach der Oberfläche desselben gerichtet ist. Für die Fixsterne sind diese Halbmesser unmessbar klein; aber für die Sonne, den Mond und die Planeten hat die beobachtende Astronomie folgende Data ergeben, welche sich auf die Erdferne und auf die Erdnähe des Gestirns beziehen und damit ihren kleinsten oder grössten Werth erreichen.

Gestirn	Halbmesser.
Sonne	15′ 45″ bis 16′ 17″
Mond	14 41 „ 16 47
Venus	4,8 „ 31,4
Mars	1,7 „ 11,9
Jupiter	15,1 „ 24,6
Saturn	7,3 „ 9,9

Für die Sonne sind die entsprechenden Zeiten der Erdferne und Erdnähe: Anfang Juli und Anfang Januar.

Um aus der beobachteten Höhe des obern oder untern Randes die von der Oberfläche der Erde gesehene oder scheinbare Höhe des Mittelpunktes des Gestirns (scheinbare Centralhöhe) zu erhalten, müsste man den Halbmesser anwenden, wie er von der Oberfläche der Erde gesehen erscheint, also einen etwas grösseren Halbmesser als den für den Mittelpunkt der Erde gegebenen. Doch ist diese Vergrösserung nur für den Mondhalbmesser merklich. Für das Maximum der Vergrösserung des Mondhalbmessers ergiebt der Fall der Erdnähe und der Stand des Mondes im Zenith unter dem Aequator, mit den Werthen der beiden vorhergehenden Tafeln sogleich das Maximum $= 18'',33$; und den grösstmöglichsten Halbmesser $= 16' 47'' + 18'' = 17' 5''$. Es sei ϱ der gesuchte vergrösserte Halbmesser, ϱ'

der für den Mittelpunkt der Erde gegebene, h die beobachtete, h′ die auf den Mittelpunkt der Erde reducirte Höhe. Da nun der Winkel, unter welchem man einen Gegenstand sieht, im umgekehrten Verhältnisse mit der Entfernung des Gegenstandes steht, so sei Δ die Entfernung des Gestirnsmittelpunktes vom Beobachtungsorte, Δ' die Entfernung desselben Mittelpunktes vom Erdmittelpunkte. Ferner sei r der lineare, also unveränderliche Halbmesser des Mondes, so wird $\sin \varrho = \frac{r}{\Delta}$, $\sin \varrho' = \frac{r}{\Delta'}$,

$\frac{\sin \varrho}{\sin \varrho'} = \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\cos h}{\cos h'}$, also

$$\sin \varrho = \sin \varrho'. \frac{\cos h}{\cos h'} \text{ oder } \varrho = \varrho'. \frac{\cos h}{\cos h'}$$

Demnach verhält sich der Cosinus der wahren Höhe zum Cosinus der scheinbaren Höhe wie der vom Mittelpunkt der Erde gesehene Halbmesser zum vergrösserten Halbmesser. Für Höhen nahe an 90° würde aber dies Verhältniss der Cosinus unbestimmt. Um alles durch die scheinbare Höhe h auszudrücken hat man $\cos h' = \cos (h + p) = \cos h \cos p - \sin h \sin p$. Mit Weglassung der Grössen 2ter Ordnung wäre $\cos p = 1$ zu setzen und wenn die Horizontal-Parallaxe P eingeführt wird, also $p = P \cos h$, so ist $\cos h' = \cos h - P \sin h \cos h$, und $\frac{\cos h}{\cos h'} =$

$\frac{1}{1 - P \sin h} = 1 + P \sin h$ bis auf Grössen zweiter Ordnung exclusive. Damit wird die Vergrösserung schon genähert

$$\varrho - \varrho' = \varrho' P. \sin h. \sin 1''.$$

Um schärfer den Werth der Vergrösserung zu bestimmen, st $\cos p = 1 - \frac{1}{2} p^2 = 1 - \frac{1}{2} P^2 \cos h^2$ mitzunehmen, wodurch ios $h' = \cos h - \frac{1}{2} P^2 \cos h^3 - P \cos h \sin h$ und $\frac{\cos h}{\cos h'} =$

$\frac{1}{1 - P \sin h - \frac{1}{2} P^2 \cos h^2} = 1 + P (\sin h + \frac{1}{2} P \cos h^2) + P^2 (\sin h + \frac{1}{2} P \cos h^2)^2$. Oder da hiermit nicht über die Grössen zweiter Ordnung hinausgegangen werden kann:

$$\varrho - \varrho' = \varrho' \left\{ P \sin h. \sin 1'' + \tfrac{1}{2} P^2 (1 + \sin h^2) \sin 1''^2 \right\}$$

Da übrigens das Verhältniss des Halbmessers zur Horizontalparallaxe eine constante Grösse ist, wofür jetzt nach Adams 0,273114 angenommen wird, also $\varrho' = 0{,}273114\ P$ (Naut. Alm. pr. 1856), so kann nach Einführung dieser Constante, die Horiz.-Parallaxe P in der Formel entbehrt werden. — Beispiel. Für $\varrho' = 16' 47''$ und $h = 90^0$ wird die Vergrösserung $= 18'',001 + 0'',322 = 18'',323$.

Verbindet man $\frac{\sin 1''}{0{,}273114}$ zu einer Constante $= c = \frac{1}{56334}$; $\log c = 5{,}24923 - 10$ so wird die Vergrösserung $\varrho - \varrho'$ des Mondhalbmessers ϱ' für die beobachtete Höhe h:

$$\varrho - \varrho' = \varrho'^2 c \sin h + \tfrac{1}{2} \varrho'^3 c^2 + \tfrac{1}{2} \varrho'^3 c^2 \sin h^2$$

z. B. für $\varrho' = 16' 47''$ und $h = 30^0$ ist die Vergrösserung $= 9'',000 + 0'',161 + 0'',040 = 9'',201$. *) Die Vergrösserung des halben Monddurchmessers konnte demnach mit der Höhe und dem Halbmesser als Argumenten in eine Tafel gebracht werden z. B. Taf. XI im Nautischen Jahrbuche von Dr. Bremiker oder Taf. XIV in den Tafeln v. Dr. Rümker.

Durch die Refraction wird die kreisförmige Gestalt der Sonnen- und Mondscheibe bei einem niedrigen Stande dieser Gestirne nicht unmerklich verändert. Für die hier in Betracht kommende Reduction von Höhen ist nur zu berücksichtigen, dass der verticale Halbmesser durch die Refraction um so viel verkürzt wird, wie der Unterschied der Refraction zwischen der beobachteten Höhe des obern oder untern Randes und dem Mittelpunkte des Gestirns beträgt. Um diese Correction des Halbmessers nicht aus der Refractionstafel zu entnehmen, dienen zur Erleichterung die Tafeln XIV (Bremiker Naut. Jahrb.) oder

---

*) Eine etwas abweichende Formel in einigen Lehrbüchern z. B. von Albrecht und Vierow, rührt daher, dass der Cosinus der Parallaxe = 1 gesetzt, und doch die andern Grössen 2. Ordnung weiter berücksichtigt sind, wodurch die obige Formel in

$$\varrho - \varrho' = \varrho'^2 c \sin h + \varrho'^3 c^2 \sin h^2$$

übergehen würde. Das Beispiel danach berechnet gäbe die Vergrösserung $\varrho - \varrho' = 9'',000 + 0'',080 = 9'',080$ statt $9'',201$.

Taf. 34 (Tuxen). Der Betrag kann für 2° Höhe auf 75″ steigen und für noch niedrigere Höhen bedeutend mehr werden.

§ 15. Rechnungsbeispiel. Es sei auf 54° 19′ N. Breite die beobachtete doppelte Meridianhöhe des untern Mondrandes = 14° 10′; das Barometer zeigte 29 Zoll 3 Linien franz. Maass = 31,173 engl. Zoll, das Thermometer + 7°, 5 R. = 48,9 F. Der Collimationsfehler des Instrumentes = — 2′ 30″, die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes = 61′30″, der Halbmesser gültig für den Mittelpunkt der Erde = 16′ 47″. Hieraus die wahre Höhe des Mondes zu finden, also dieselbe auf den Mittelpunkt der Erde zu reduciren.

Auflösung.

Doppelte Höhe	14° 10′	
Indexfehler	— 2. 30	
	14. 7. 30	
Einfache Höhe des unt. R.	7. 3. 45	
Mittlere Refr.	— 7. 16.	
Corr. für Bar.	— 22	
Cor. für Therm.	— 1	
	6. 56. 6.	
Höhenparallaxe	+ 60. 53	= (61′30″ — 8″,2) × cos (6° 56′ + 11′)
Wahre Höhe des unt. R.	7. 56. 59	
Halbmesser	+ 16. 47	
Wahre Höhe des Mittelp.	8. 13. 46	

Eine zweite Form der Auflösung, wobei man erst die scheinbare Höhe des Mittelpunktes sucht, stellt sich so:

Höhe des unt. Randes	7. 3. 45	
Vergrösserter Halbmesser verkürzt durch Refr.	+ 16. 34	= 16′47′ + 2″ Vergr. — 15″ Verk. d. Refr.
Schb. Höhe des Mittelp.	7. 20. 19	
Mittl. Refr.	— 7. 1	

Cor. für Bar.	— 21	
Cor. für Therm.	— 1	
	7. 12. 56.	
Höhenparallaxe	+ 60. 51. =	$(61'30'' - 8''2) \times (\cos 7^0 13' + 11')$
Wahre Höhe des Mittelp.	8. 13. 47.	

Die Höhenparallaxe ohne die Reduction $\varphi - \psi = 11'$ würde nur 2″ Unterschied gegeben haben. Ganz ohne Rücksicht auf Abplattung wäre die Differenz 10″ geworden, wovon 8″ auf die Reduction der Horizontalparallaxe und 2″ auf die Reduction der Höhenparallaxe kommen.

IV. Kapitel.

Correctionen einer beobachteten Monddistanz für Refraction und Parallaxe zur Reduction derselben auf den Mittelpunkt der Erde.

§ 16. Der Zweck dieser Reductionen ist die Längenbestimmung des Beobachtungsortes durch Vergleichung einer beobachteten Winkeldistanz zwischen dem Monde und der Sonne oder einem Sterne, mit der schon im Voraus berechneten, und nach der Zeit des ersten Meridians in den nautisch-astronomischen Ephemeriden angegebenen Monddistanz. Diese Vorausberechnung der Monddistanzen ist nun seit 100 Jahren ohne Unterbrechung erfolgt. Vor der Zeit hatten die Beobachter, wenn sie die Längenbestimmung durch den Mond benutzen wollten, eine mühsame Reduction auszuführen, um aus der observirten Distanz den wahren Mondsort, namentlich die Länge des Mondes, zu bestimmen, und dadurch die Zeit des ersten Meridians mit der Ortszeit der Beobachtung für die Längenbestimmung vergleichen zu können. Lacaille*) (1759 Mém. Paris) regte vorzüglich den Plan einer Vorausberechnung der Winkelabstände des Mondes an, und glaubte, dass eine Angabe von 4 zu 4 Stunden genüge. In

*) Im Traité de Navigation par M. Bouguer, Paris 1760, giebt Lacaille ein Modèle pour un Almanach Nautique für den Juli 1761, worin die Parallaxe des Mondes von 12 zu 12 Stunden und die Distances au bord éclairé de la Lune von 4 zu 4 Stunden vorausberechnet waren.



England kam die Sache zuerst zur Ausführung durch die Herausgabe des ersten Jahrgangs des Nautical Almanack and astronomical ephemeris for the year 1767, London 1766. Der Herausgeber und Gründer dieser seitdem ununterbrochen fortgesetzten Ephemeride, Nevil Maskelyne, hatte die Monddistanzen von 3 zu 3 Stunden angegeben, ein Plan der bis jetzt beibehalten ist. Im Jahre 1774 folgte auch die Aufnahme der Monddistanzen in dem französischen astronomischen Jahrbuche, welches unter dem Titel Connaissance des Temps ou des mouvements célestes schon seit 1679 bestand. Im Jahre 1821 erhielten die Monddistanzen eine Erweiterung, indem auch die Vorausberechnung der Abstände des Mondes von den vier hellsten Planeten: Venus, Mars, Jupiter und Saturn hinzugefügt wurden. Professor H. C. Schumacher gab dafür zunächst eine besondere Ephemeride unter dem Titel: Ephemeris of the distances of the four planets Venus, Mars, Jupiter und Saturn from the Moon's center for the year 1823. Copenhagen 1821. Sie wurden aber nur bis zum Jahre 1832 fortgesetzt, nachdem auch die englischen und französischen Ephemeriden die Monddistanzen für diese Planeten mit aufgenommen hatten. Im Berliner astronomischen Jahrbuche wurden die Monddistanzen für die Jahrgänge 1844 bis 1851 gegeben. Von 1852 an ist ihre Mittheilung dem nautischen Jahrbuche von Dr. Bremiker überlassen worden, welches seitdem auf Veranlassung des königl. Handelsministeriums zu Berlin erscheint.

Aus der Geschwindigkeit der Bewegung des Mondes ergiebt sich die zu erwartende Genauigkeit für die Längenbestimmung. Da der Mond in 27⅓ Tagen seinen siderischen und in 29½ Tagen seinen synodischen Umlauf vollzieht, so wird die tägliche Aenderung einer Monddistanz ungefähr 12 bis 13 Grade, oder stündlich einen halben Grad betragen. Aber eine Stunde stimmt mit 15 Graden Längenunterschied überein, daher wird ein Fehler in der observirten Monddistanz sich ungefähr 30fach vergrössert auf die zu bestimmende Länge übertragen. Oder, um die Länge auf 1 Bogenminute sicher zu erhalten, müsste die Monddistanz auf 2″ sicher gemessen sein. So genau lässt sich aber die Monddistanz auch nach den neuesten und besten Mond-

tafeln (von Hansen) nicht einmal mit Sicherheit vorausberechnen. Umgekehrt wird aus der Sicherheit von einer halben Minute in der Messung der Monddistanzen, welche sich bei guten Beobachtungen noch verbürgen lässt, die Länge nicht genauer als auf $^1/_4$ Grad bei einer einzelnen Beobachtung zu erwarten sein. Durch ein Mittel aus mehreren Beobachtungen ist freilich mehr zu erreichen, besonders wenn man eine Reihe zunehmender Distanzen und eine Reihe von ungefähr eben so grossen abnehmenden Distanzen unter günstigen Umständen erlangt hat, so dass das Mittel aus beiden Längenresultaten frei von den Fehlern des Instrumentes ist.

Die Berechnung der Monddistanzen muss gleichfalls sorgfältig auf Secunden durchgeführt werden, um nur die entsprechende Länge auf Minuten richtig zu erhalten.

Mit den verschiedenen Anforderungen an die Auflösung der Aufgabe sind eine grosse Menge von Verfahrungsarten entstanden, welche zwar alle nur die Erleichterung und Sicherheit der Rechnung bezwecken, aber diesen Zweck auf verschiedenem Wege und mit verschiedenem Erfolg erreichen. Lässt sich mit einer bequemen und hinreichend genauen Auflösung noch die Vermeidung der Zeichenwechsel verbinden, so muss diess als ein Vortheil angesehen werden. Ein ferneres Mittel der Auflösung sind die besondern Hülfstafeln, welche die noch übrige Rechnung auf ein Minimum beschränken. Auch diese letztere kleine Rechnung würde beseitigt worden sein, wenn nur der Umfang der Hülfstafeln dadurch nicht gar zu ausgedehnt geworden wäre. Endlich hat man noch mit Umgehung aller Rechnung die Bestimmung der gesuchten Grösse durch Construction, oder auch durch Abmessung auf construirten Tafeln (Linear Tables) zu erreichen gesucht.

Man pflegt die verschiedenen Arten der Auflösung durch Rechnung in directe Methoden und Näherungsmethoden einzutheilen. Die directen Methoden sind hier strenge Formeln, welche die Auflösung in einem geschlossenen, direct zu berechnenden Ausdrucke darstellen. Die Näherungsmethoden geben die Auflösung gewöhnlich in einer Reihenentwicklung, deren Glieder

mit wenig Decimalstellen leicht berechnet werden können; oder auch in einer geschlossenen Formel, die aber zur vollständigen Berechnung noch einer kleinen Wiederholung mit einem vorläufig bestimmten Werthe bedarf.

§ 17. Directe Methoden zur Reduction der Monddistanzen.

Es sei

- s die scheinbare (mit Refraction und Parallaxe behaftete) Höhe der Sonne oder eines Sterns.
- m die scheinbare Höhe des Mondes,
- d die scheinbare Distanz,
- s′ die wahre (von Refr. und Par. befreite) Höhe der Sonne,
- m′ die wahre Mondhöhe,
- d′ die wahre Distanz,

so ist die letzte Grösse die gesuchte und die übrigen sind als bekannte, entweder beobachtete oder zum Theil berechnete Grössen, anzusehen.

Das sphärische Dreieck, gebildet vom Zenith und den beiden scheinbaren Gestirnsörtern, hat einen Winkel am Zenith = Z, welcher unverändert derselbe bleibt in einem zweiten, von den beiden wahren Gestirnsörtern und dem Zenith gebildeten Dreiecke, da die Refraction und Parallaxe in verticaler Richtung wirken. (Von einer kleinen Correction wegen der Abplattung der Erde wird vorläufig abgesehen).

Die Gleichung der sphärischen Trigonometrie giebt demnach:

$$\cos d = \sin s \sin m + \cos s \cos m \cos Z$$
$$\cos d' = \sin s' \sin m' + \cos s' \cos m' \cos Z$$

und damit durch Elimination von cos Z eine erste Formel für die Berechnung der wahren Distanz als Grundgleichung für die directen Auflösungen:

$$1)\quad \cos d' = \sin s' \sin m' + \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m}(\cos d - \sin s \sin m).$$

Diese Formel würde sich aber so wenig für die Rechnung empfehlen, dass eine einzelne Berechnung der sphärischen

Dreiecke vorzuziehen wäre. Addirt man dagegen zu dieser Grundgleichung den identischen Ausdruck:

$$0 = \cos s' \cos m' - \cos s' \cos m'$$

so ergiebt sich

$$2) \cos d' = \cos(s' - m') - \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \left\{ \cos(s - m) - \cos d \right\}$$

oder die Formel von Richard Dunthorne (Naut. Alm. f. 1767). Der Logarithmus des Bruches $\frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m}$ wurde dazu als besondere Hülfstafel unter dem Namen „Logarithmic difference" berechnet und findet sich noch in den meisten nautischen Tafeln. Diese Formel ist unter den directen Methoden die kürzeste, wenn man natürliche (nicht logarithmische) Sinus anwendet. Um den Zeichenwechsel bei cos d für $d > 90^0$ zu vermeiden, führte Mackay*) dabei die Sinus versus ein, womit:

$$3) \sin\text{vers}\, d' = \sin\text{vers}(s' - m') + \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \left\{ \sin\text{vers}\, d - \sin\text{vers}(s - m) \right\}$$

Statt der Höhenunterschiede liessen sich auch die Summen der Höhen einführen, indem man von der Grundgleichung (1) den Ausdruck $0 = \cos s' \cos m' - \cos s' \cos m'$ subtrahirt, so dass:

$$4) \cos d' = -\cos(s' + m') + \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \left\{ \cos d + \cos(s + m) \right\}$$

oder wenn man die Summe der Cosinus in ein Product verwandelt:

$$5) \cos d' = -\cos(s' + m') + 2\, \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos \tfrac{1}{2}(s + m + d) \cos \tfrac{1}{2}(s + m - d)$$

die Formel von Lexell,**) welche von Fuss***) und Lalande (Astron. § 4191) allen andern Methoden vorgezogen wurde.

---

*) Andrew Mackay: The Theorie and practise of finding the longitude. London 1793. — 3. Edit. London 1809.

**) Observationes circa methodum inveniendi longitudinem. Auct. Lexell. Act. Ac. Petr. p. A. 1777. Petropoli 1780. p. 350.

***) Nicol. Fuss: Réflexions sur les principales méthodes de corriger les distances apparentes etc. Act. Ac. Petr. p. A. 1779 p. 336.

Entwickelt man ebenso in der Dunthorneschen Formel die Differenz der Cosinus, so ergiebt sich:

6) $\cos d' = \cos (s' - m')$

$$- 2 \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cdot \sin \tfrac{1}{2} (d + m - s) \cdot \sin \tfrac{1}{2} (d + s - m).$$

Zur Verwandlung der Formeln für die logarithmische Rechnung kann man schon in (5) setzen:

7) $\cos v = 2 \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos \tfrac{1}{2} (s + m + d) \cos \tfrac{1}{2} (s + m - d)$, so wird

$$\cos d' = 2 \sin \tfrac{1}{2} (s' + m' + v) \sin \tfrac{1}{2} (s' + m' - v)$$

oder wenn in (6) gesetzt wird:

8) $\cos w = 2 \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \sin \tfrac{1}{2} (d + m - s) \sin \tfrac{1}{2} (d + s - m)$,

$$\cos d' = 2 \sin \tfrac{1}{2} (w + m' - s') \sin \tfrac{1}{2} (w + s' - m').$$

Da für kleine Werthe von d die Bestimmung durch den Cosinus ungenau, auch ein Zeichenwechsel mit dem Cosinus, bei 90° Distanz, verbunden ist, so ist man zu dem Sinus des halben Winkels übergegangen. Subtrahirt man in (5) beide Seiten von 1, so ergiebt sich nach einer kleinen Reduction:

9) $\sin A^2 = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cdot \frac{\cos \tfrac{1}{2} (s + m + d) \cos \tfrac{1}{2} (s + m - d)}{\cos \tfrac{1}{2} (s' + m')^2}$ gesetzt

$$\sin \tfrac{1}{2} d' = \cos \tfrac{1}{2} (s' + m') \cos A,$$

welches die Formel von Borda ist. (Voyage fait par ordre du Roi en 1771 et 1772 par M. M. de Verdun, de Borda et Pingré Paris 1778 p. 367. — Description et usage du cercle de réflexion pas M. le chevallier de Borda, Paris 1787 p. 76). Auch Lexell (l. c.) gab diese Formel mit den vollständig zugeordneten oder verwandten Ausdrücken nahe um dieselbe Zeit. *) An der Borda'schen Formel wird der Vorzug geschätzt, dass sie ganz für die logarithmische Rechnung eingerichtet ist, und keinen

*) Lexell bezeichnet die scheinb. Zenithdistanzen mit a und b, die scheinb. Distanz mit c, die wahren Grössen mit a′, b′, c′. Die halbe Summe $\tfrac{1}{2} (a + b + c) = s$ gesetzt, so sind die 4 Formeln von Lexell:

$$1) \ \operatorname{tg} A^2 = \frac{\sin a' \sin b'}{\sin a \sin b} \, \frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{\sin \tfrac{1}{2} (a' - b')^2}$$

$$\sin {}^1\!/_2 \, c' = \sin {}^1\!/_2 \, (a' - b') \sec A$$

Zeichenwechsel darbietet. Ein Nachtheil kann dabei aber vorkommen, wenn der Hülfswinkel A nahe an 90° ist, wo die Bestimmung desselben durch den Sinus und die nachherige Anwendung des Cosinus ungenau werden kann. Sehr verbreitet ist auch eine Veränderung der Borda'schen Formel, welche von Mackay (1793) eingeführt sein wird, nämlich den Nenner des zweiten Theils wegzulassen, wodurch sie übergeht in:

$$10)\ \sin B^2 = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos \tfrac{1}{2}(s + m + d) \cos \tfrac{1}{2}(s + m - d)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} d'^2 = \cos\left(\frac{s' + m'}{2} + B\right) \cos\left(\frac{s' + m'}{2} - B\right)$$

Eine zugeordnete Formel welche für Distanzen über 90° vorzuziehen wäre, wurde von Maskelyne *) (1781) und Klügel **) (1808) empfohlen. Sie ergiebt sich durch die Addition der Einheit zu beiden Seiten der Gleichung (6) in dieser Form:

$$11)\ \sin C^2 = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cdot \sin \tfrac{1}{2}(d + m - s) \sin \tfrac{1}{2}(d + s - m)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} d'^2 = \cos\left(\frac{s' - m'}{2} + C\right) \cos\left(\frac{s' - m'}{2} - C\right).$$

Im Gegensatze zur Erzielung der rein logarithmischen Rechnung konnte sich aber auch der Plan rechtfertigen lassen, eine Erleichterung und Sicherheit der Rechnung dadurch herbei zu führen, dass man sie ganz von den Logarithmen befreite, also nur Summen, keine Producte einführte, welches auch durch Er-

---

$$2)\ \cos B^2 = \frac{\sin a' \sin b'}{\sin a \sin b} \frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin {}^1/_2 (a' + b')^2}$$

$$\sin {}^1/_2\, c' = \sin {}^1/_2 (a' + b') \sin B$$

$$3)\ \cos C^2 = \frac{\sin a' \sin b'}{\sin a \sin b} \cdot \frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{\cos {}^1/_2 (a' - b')^2}$$

$$\cos {}^1/_2\, c' = \cos {}^1/_2 (a' - b') \sin C$$

$$4)\ \mathrm{tg}\, D^2 = \frac{\sin a' \sin b'}{\sin a \sin b} \frac{\sin s . \sin (s - c)}{\cos {}^1/_2 (a' + b')^2}$$

$$\cos {}^1/_2\, c' = \cos {}^1/_2 (a' + b') \sec D.$$

*) Tables requisite to be used with the Naut. Alm. 2. Edit. London 1781.

**) Berliner Astron. Jahrb. f. 1808 p. 243.

gänzung mittelst einer kleinen Hülfstafel möglich wurde. Setzt man nämlich $\frac{1}{2} \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} = \cos p$, so wird die Dunthorne'sche Formel, wenn man zur Vermeidung des Zeichenwechsels, die Sinus versus einführt, so umgestaltet:

$$12)\ \cos p = \frac{1}{2} \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m}$$

$$\sin\text{vers}\, d' = \sin\text{vers}\,(s' - m') + \sin\text{vers}\,(d + p) + \sin\text{vers}\,(d - p) - \sin\text{vers}\,(p + s - m) - \sin\text{vers}\,(p + m - s)$$

welches die Methode von Prof. W. L. Krafft*) ist (1791), der dabei die Berechnung einer Hülfstafel empfahl, da das Verhältniss $\frac{\cos s'}{\cos s}$ constant sei für eine mittlere Refraction. Die Hülfstafel wurde von Prof. J. H. van Swinden berechnet (Verhandling over het bepaalen der lengte op zee . . . Amsterdam 1802 p. 77 bis 88) für die Mondhöhe von 3° bis 90°, wozu p = 60° 0′ 44″ bis 60° 34′ 37″ gehört. Die Krafft'sche Methode ist vorzüglich bei den Niederländern in Gebrauch gekommen. Sie erfordert eine Sinusversustafel, welche Mackay **) von 10 zu 10 Secunden berechnet, den nautischen Tafeln hinzugefügt hatte.

Als ein weiterer kleiner Vortheil musste es erscheinen, die Zeichen der Sinus versus alle positiv zu machen, indem man $-\sin\text{vers}\, x = -2 + \sin\text{vers}\,(180 - x)$ setzen kann, wodurch schon die vorhergehende Formel übergehen würde in

$$13)\ \cos p = \frac{1}{2} \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m}$$

$$\sin\text{vers}\, d' = \sin\text{vers}\,(s' - m') + \sin\text{vers}\,(d + p) + \sin\text{vers}\,(d - p) + \sin\text{vers}\,(180 - p - s + m) + \sin\text{vers}\,(180 - p - m + s) - 4$$

Es wurde aber als etwas einfacher vorgezogen, statt der Unterschiede der Höhen ihre Summen einzuführen, wozu man

*) Méthode à la portée des Navigateurs pour réduire en distance vraie la distance apparente etc. Par M. Krafft. Prés. à l'Acad. 1791. Petropoli 1793. Nov. Act. T. VII. p. 370.

**) The theory and practise of finding the longitude at sea or land . . . with new tables. By Andrew Mackay, L. L. D. Mathematical Examiner to the corporation of Trinity-House, the East India Company etc. London 1809. 3. Edit.

von der hier mit (4) bezeichneten Formel ausgehen könnte, welche bei gleicher Behandlung und nach Einführung des Sinus versus das Resultat giebt:

$$14)\ \cos p = \tfrac{1}{2}\ \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m}$$

$$\sin\text{vers}\, d' = \sin\text{vers}\,(180 - s' - m') + \sin\text{vers}\,(d + p) + \sin\text{vers}(d - p) + \sin\text{vers}\,(s + m + p) + \sin\text{vers}\,(s + m - p) - 4.$$

Diese Formel hat Mendoza*) mit Hülfstafeln für den Winkel p im Jahre 1795 eingeführt, auch mit Sinusversus-Tafeln von 10 zu 10 Secunden versehen für die Winkel von 0° bis 180° in der englischen Ausgabe: Tables for facilitating the calculation of Nautical Astronomy etc. By Joseph de Mendoza Rios, Esq. F. R. S. London 1801.

In Rücksicht auf Schärfe der Rechnung mit Benutzung der gewöhnlichen logarithmischen Tafeln, mussten sich noch ein Paar Formeln empfehlen, welche den Hülfswinkel nicht vermittelst des Sinus (wie in der Borda'schen Methode) sondern durch die Tangente bestimmen. Lexell hat diese Formeln schon in der angef. Abh. v. J. 1777 gegeben, und Dr. Bremiker **) dieselben ferner so zerlegt, dass sie im Uebrigen eine Wahl des Sinus oder Cosinus für die genaueste Bestimmung gewähren. Zur Herleitung dieser Formeln kann man hier von der Formel (6) ausgehen, indem man beide Seiten von der Einheit subtrahirt, wodurch sie nach einer leicht auszuführenden Reduction die Gestalt annimmt:

$$15)\ t^2 = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \sin \tfrac{1}{2}(d + m - s) \sin \tfrac{1}{2}(d + s - m)$$

$$\text{tg}\, u = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(s' - m')}{t}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} d' = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(s' - m')}{\sin u} = \frac{t}{\cos u}.$$

*) Memoria sobre algunos métodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares. Por Don José Mendoza y Rios, Capitan de Navio de la Real Armada. Madrid 1795.

**) Astron. Nachr. Bd. 30. 1850 p. 311.

Eben so erhält man noch für Distanzen grösser als 90° eine zugeordnete Formel, welche ebenfalls von Lexell und Bremiker gegeben wurden, und die sich hier aus der Formel (5) entwickelt, nämlich:

$$16)\ v^2 = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos \tfrac{1}{2} (s + m + d) \cos \tfrac{1}{2} (s + m - d)$$

$$\text{tg}\, w = \frac{\sin \frac{1}{2} (s' + m')}{v}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} d' = \frac{\sin \frac{1}{2} (s' + m')}{\sin w} = \frac{v}{\cos w}.$$

Ein Zeichenwechsel ist in beiden Formeln, wie man sieht, nicht zu berücksichtigen.

Dasselbe gilt auch von der folgenden Methode, welche die Distanz mittelst der Tangente bestimmt und daher vorzuziehen ist. Bildet man nämlich durch Division aus sin und cos in den Endformeln 15 und 16 die tang, so ergiebt sich zunächst:

$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2} \cdot d' = \frac{t \cos w}{v \cos u} = \sqrt{\frac{t^2 + \sin \frac{1}{2} (s' - m')^2}{v^2 + \sin \frac{1}{2} (s' + m')^2}}$$

oder nach der Substitution der Werthe von t und v und Einführung des Winkels am Zenith = Z:

$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2}\, d'^2 = \frac{\cos s' \cos m' \sin \frac{1}{2} Z^2 + \sin \frac{1}{2} (s' - m')^2}{\cos s' \cos m' \cos \frac{1}{2} Z^2 + \sin \frac{1}{2} (s' + m')^2}$$

Um diese Formel logarithmisch brauchbarer zu machen, kann man Zähler und Nenner mit 2 multipliciren und auch im Zähler $\cos \frac{1}{2} Z^2$ einführen, wodurch:

$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2}\, d'^2 = \frac{1 + \cos (s' + m') - 2 \cos s' \cos m' \cos \frac{1}{2} Z^2}{1 - \cos (s' + m') + 2 \cos s' \cos m' \cos \frac{1}{2} Z^2};$$

$\dfrac{2 \cos s' \cos m' \cos \frac{1}{2} Z^2}{\sin (s' + m')} = \text{tg}\, A$ gesetzt, giebt:

$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2}\, d'^2 = \frac{1 + \cos (s' + m') - \text{tg}\, A \sin (s' + m')}{1 - \cos (s' + m') + \text{tg}\, A \sin (s' + m')}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2} (s' + m')^2 - 2 \sin \frac{1}{2} (s' + m') \cos \frac{1}{2} (s' + m')\, \text{tg}\, A}{2 \sin \frac{1}{2} (s' + m')^2 + 2 \sin \frac{1}{2} (s + m') \cos \frac{1}{2} (s' + m')\, \text{tg}\, A}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s' + m') \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(s' + m')^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s' + m') \operatorname{tg} A}$$

$$= \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(s' + m') \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s' + m') \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(s' + m') + \operatorname{tg} A}$$

$$= \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(s' + m') \operatorname{cotg}\left(A + \frac{s' + m'}{2}\right)$$

Die zu berechnenden Formeln sind also:

$$17)\quad \frac{2 \cos s' \cos m' \cos \frac{1}{2}(s + m + d) \cos \frac{1}{2}(s + m - d)}{\cos s \cos m \sin (s' + m')} = \operatorname{tg} A$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d'^2 = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(s' + m') \operatorname{cotg} \left(A + \frac{s' + m'}{2}\right)$$

Man hätte auch $\sin \frac{1}{2} Z^2$ statt $\cos \frac{1}{2} Z^2$ einführen und damit auf $\sin (s' - m')$ übergehen können, wodurch das Resultat sich so stellt:

$$\frac{2 \cos s' \cos m' \sin \frac{1}{2} Z^2}{\sin (s' - m')} = \operatorname{tg} B \text{ gesetzt, so wird}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d'^2 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s' - m') \operatorname{tg}\left(B + \frac{s' - m'}{2}\right).$$

Da dies aber auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ führen könnte (für $s' = m'$), so ist die obige Formel (17) vorzuziehen. Beide Formeln finden sich schon von Prof. Dr. Ligowsky in Grunerts Archiv Th. 52 angegeben. Dieselben Formeln erhält man auch aus den unter (9) angeführten 4 Lexell'schen Formeln durch Division, und noch directer durch das Zurückgehen auf die Grundgleichung $\cos d' = \sin s' \sin m' + \cos s' \cos m' \cos Z = - \cos (s' + m') + 2 \cos s' \cos m' \cos \frac{1}{2} Z^2$ u. s. w.

Um aber wenigstens einen Theil der Rechnung mit sehr wenigen, etwa 4, Dezimalstellen ausführen zu können, musste der Formel die entsprechende Gestalt gegeben werden. So giebt die Umformnng der Grundgleichung (1) durch Verwandlung der Producte wie z. B. $\cos s \cos s' = \frac{1}{2} \sin (s + s') - \frac{1}{2} \sin (s - s')$ die folgende bemerkenswerthe Formel:

17) $\cos s \cos m \cos d' = \cos s' \cos m' \cos d$
$+ \frac{1}{2} \sin(m' - m) \sin(s + s') - \frac{1}{2} \sin(s - s') \sin(m + m')$
welche als Methode von Prof. Simonoff in der Library of useful Knowledge, Astronomy (Rothmann), London 1832 p. 227, angeführt und als eine der besten Methoden zur Reduction der Monddistanzen empfohlen wurde, mit dem Wunsche, dass für die beiden letzten Glieder von so geringem Betrage eine besondere Hülfstafel berechnet werden möchte.

Derselbe Zweck, die zu berechnenden Glieder möglichst klein zu machen, war übrigens schon weiter verfolgt worden in den beiden Methoden von Huber*), dessen ältere Methode (vom Jahre 1791) so lautet, wie sich hier durch Subtraction von $\cos s \cos m \cos d$ zu beiden Seiten der Formel (17) und weitere Reduction ergiebt:

18) $\cos m \cos s (\cos d' - \cos d)$
$= 2 \sin \frac{1}{2}(m - m' + s - s') \sin \frac{1}{2}(m + m' + s + s') \cos d$
$+ 2 \sin \frac{1}{2}(m - m' - s + s') \sin \frac{1}{2}(m + m' - s - s') \cos d$
$+ \frac{1}{2} \sin(m' - m) \sin(s' + s) - \frac{1}{2} \sin(s - s') \sin(m + m')$

Als neuere Methode gab Hubert die folgende Formel, welche er aus der Grundgleichung (1) durch Hinzufügung der identischen Gleichung

$\sin m' \sin s' \cos m \cos s - \cos m \cos s \cos d$
$= \sin m' \sin s' \cos m \cos s' - \cos m \cos s \cos d$
$+ \sin m' \sin s' \cos m' \cos s' - \sin m' \sin s' \cos m' \cos s'$

und fernere Transformation herleitet, und deren Ergebniss, wenn man $m' = m + p$, $s' = s - r$ und $\frac{1}{2}(m + s + d) = g$ setzt, die folgende Formel wird:

19) $\cos m \cos s (\cos d' - \cos d)$

$$= 2 \sin \frac{p-r}{2} \sin\left(m + s + \frac{p-r}{2}\right) \sin\left(g - m - \frac{p+r}{2}\right) \times \sin\left(g - s + \frac{p+r}{2}\right)$$

*) Versuch über das astronomisch-nautische Problem betreffend die Reduction der scheinbaren Monddistanzen auf wahre. Von Daniel Huber, Prof. in Basel. Mon. Corr. XII Bd. 1805 p. 309.

$$- 2 \sin \frac{p+r}{2} \sin\left(m - s + \frac{p+r}{2}\right) \cos\left(g + \frac{p-r}{2}\right)$$
$$\times \cos\left(g - d + \frac{p-r}{2}\right)$$

Eine weitere Entwickelung der beiden letzten Factoren in jedem Gliede würde noch eine wesentliche Vereinfachung dieser Formel gegeben haben, nämlich den damit identischen, aber kürzeren Ausdruck:

20) $\cos s \cos m (\cos d' - \cos d)$

$$= 2 \sin \frac{p-r}{2} \sin\left(m + s + \frac{p-r}{2}\right) \sin(g - m) \sin(g - s)$$

$$- 2 \sin \frac{p+r}{2} \sin\left(m - s + \frac{p+r}{2}\right) \cos g . \cos(g - d)$$

Diese letzte Formel wurde in nur wenig verschiedener Form (21) von Prof. Ligowsky,**) und zwar auf einem kürzeren Wege gefunden, nämlich durch Anwendung der Gauss'schen Gleichungen auf das Problem der Monddistanzen. Hiernach hat man bekanntlich, wenn Z den Winkel am Zenith, S und M die Winkel am Sonnen- und Mondsorte bezeichnen:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(S - M)}{\cos \frac{1}{2} Z} = \frac{-\sin \frac{1}{2}(s - m)}{\sin \frac{1}{2} d}, \quad \frac{\cos \frac{1}{2}(S - M)}{\sin \frac{1}{2} Z} = \frac{\cos \frac{1}{2}(s + m)}{\sin \frac{1}{2} d}$$

woraus durch Multiplication die bemerkenswerthe, auch in Delambre's Astronomie (I p. 160) vorkommende Formel $\sin \frac{1}{2} d^2 = \sin \frac{1}{2}(s - m)^2 \cos \frac{1}{2} Z^2 + \cos \frac{1}{2}(s + m)^2 \sin \frac{1}{2} Z^2$ entsteht, und weil der Winkel am Zenith durch die Refraction und Parallaxe sich nicht verändert, ebenso $\sin \frac{1}{2} d'^2 = \sin \frac{1}{2}(s' - m')^2 \cos \frac{1}{2} Z^2 + \cos \frac{1}{2}(s' + m')^2 \sin \frac{1}{2} Z^2$; daher durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen von einander und Umformung in Producte, nach der Substitution von $\cos \frac{1}{2} Z^2 = \frac{\cos g . \cos (g - d)}{\cos m \cos s}$:

---

*) Herleitung einiger Formeln zur Berechnung der wahren Distanz zwischen Sonne und Mond. Von Dr. Ligowsky. Grunerts Archiv f. Mathem. u. Physik. Bd. 40. 1863. p. 250. — Ferner auch in dem Lehrb. d. Elem. Math. von v. Hallerstein, Berlin 1863 u. 1867 p. 319.

$$21)\ \cos m \cos s (\sin \tfrac{1}{2} d'^2 - \sin \tfrac{1}{2} d^2)$$
$$= \sin \frac{p+r}{2} \sin\left(m - s + \frac{p+r}{2}\right) \cos g \cos (g - d)$$
$$- \sin \frac{p-r}{2} \sin\left(m + s + \frac{p-r}{2}\right) \sin (g - m) \sin (g - s)$$

§ 18. Näherungsmethoden zur Reduction der Monddistanzen.

Es sei $d' - d = x$ die gesuchte Reduction der scheinbaren Distanz d, um die wahre Distanz d′ zu bestimmen, $m' - m = p$ der Betrag von Parallaxe und Refraction in der Mondhöhe, $s - s' = r$ die Refraction, vermindert um die Parallaxe, in der Sonnen- oder Sternhöhe; ferner S und M die Winkel an den beiden scheinbaren Gestirnsörtern und $\frac{1}{2}(s + m + d) = g$ zur Abkürzung gesetzt. Die älteste, schon von Lacaille (1759) angewandte Form ist folgende:

$$22)\ d' = d + r \cos S - p \cos M$$
$$\sin \tfrac{1}{2} S^2 = \frac{\cos g \sin (g - m)}{\cos s \sin d},\quad \sin \tfrac{1}{2} M^2 = \frac{\cos g \sin (g - s)}{\cos m \sin d}$$

Lacaille begnügte sich mit diesen beiden Correctionen: p cos M und r cos S. Maskelyne *) fügte eine 3te Correction hinzu, welche von dem Quadrate der Grösse p abhängt, und Lexell **) entwickelte auch die von dem Produkte pr und r^2 abhängigen Glieder, womit die Grössen zweiter Ordnung vollständig berücksichtigt waren. Fasst man dieselben vorläufig unter der Bezeichnung „3te Corr.“ zusammen, so wird der vollständige Ausdruck:

$$d' = d + r \cos S - p \cos M + \text{3te Corr.}$$

Die Näherungsmethoden dieser Art unterscheiden sich auch nur in der Form, wie die Werthe von cos S und cos M bestimmt werden. Lyons, ***) ein Hauptrechner am Board of Longitude, benutzte dazu den rationalen Ausdruck des Cosinus, wonach

*) Phil. Tr. f. 1764 p. 271.

**) Act. Acad. Petr. p. A. 1777. Petropoli 1780 p. 348.

***) Tables requisite to be used with the Nautical Ephemeris. London 1766 p. 44.

$$d' = d + r\,\frac{\sin m - \sin s \cos d}{\cos s \sin d} - p\,\frac{\sin s - \sin m \cos d}{\cos m \sin d} + 3.\,\text{Corr.}$$

oder in vier Theile gesondert, wie Lyons es vorzog, und die Anweisung z. B. auch in H. Moore's practical Navigator, 12. Edit. London 1796, gegeben wird:

$$23)\ d' = d + r\left(\frac{\sin m}{\cos s \sin d} - \operatorname{tg} s \operatorname{cotg} d\right) - p.\left(\frac{\sin s}{\cos m \sin d} - \operatorname{tg} m \operatorname{cotg} d\right) + 3\text{te Corr.}$$

Zur Vermeidung des Zeichenwechsels bei dem Cosinus der Winkel führte man dann die Quadrate ein, z. B. $\cos S = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} S^2$, so dass:

$$24)\ d' = d + r - p - 2\,r \sin \tfrac{1}{2} S^2 + 2\,p \sin \tfrac{1}{2} M^2 + 3\text{te Corr.}$$

wozu die Werthe von $\sin \frac{1}{2} S^2$ und $\sin \frac{1}{2} M^2$ wie bei Lacaille (Formel 22) bestimmt wurden. Diese Formel (24) ist noch als Methode von Mendoza in Norie's Epitome of practical navigation, 15. stereot. Edit. London 1852 p. 266 angeführt.

Um beide Correctionen positiv zu machen, hätte man nur $\cos \frac{1}{2} S^2 = 1 - \sin \frac{1}{2} S^2$ einzuführen, so wird:

$$25)\ d' = d - r - p + 2\,r \cos \tfrac{1}{2} S^2 + 2\,p \sin \tfrac{1}{2} M^2 + 3\text{te Corr.}$$

als erste Methode von Bowditch. *) welche er mit Hülfstafeln versehen hatte für die Werthe $\frac{2\,r}{\cos s}$ und $\frac{2\,p}{\cos m}$ nebst Zuschuss einer Constante von 2 Graden, um alle Correctionen positiv zu machen. Es ist dabei $\cos \frac{1}{2} S^2 = \frac{\cos (g - d) \sin (g - s)}{\cos s \sin d}$ und $\sin \frac{1}{2} M^2 = \frac{\cos g \sin (g - s)}{\cos m \sin d}$ zu berechnen.

Der grösseren Gleichförmigkeit wegen liessen sich auch beide Cosinusproducte anwenden, also:

$$26)\ d' = d - r + p + 2\,r \cos \tfrac{1}{2} S^2 - 2\,p \cos \tfrac{1}{2} M^2 + 3\text{te Corr.}$$

---

*) Nathaniel Bowditch (gest. 1838 in Boston): The new american practical navigator, Boston 1800; 12. stereot. Edit. New-York 1841 p. 232.

wo $\cos \frac{1}{2} S^2 = \frac{\cos (g - d) \sin (g - s)}{\cos s \sin d}$ und $\cos \frac{1}{2} M^2$

$$= \frac{\cos (g - d) \sin (g - m)}{\cos m \sin d} \text{ ist,}$$

oder etwas bequemer, wenn man die Zenithdistanzen statt der Höhen anwendet, wodurch die Bildung zweier Reste wegfällt, wie Bowditch (a. a. O. p. 243) diese Formel als seine dritte Methode gegeben hat. Benutzt man aber die Höhen, so ist die Bestimmung durch den Sinus die einfachste (wie in 24). Aus diesem Grunde ist die Formel (24) auch vorgezogen, z. B. in der Steuermannskunst von Dr. Breusing. Bremen 1864.

Obgleich die drei letzten Formeln gar keinen Zeichenwechsel haben, so ist doch die folgende Methode von Witchell*), ungeachtet ihrer mehrfachen Zeichenwechsel, gewöhnlich vorgezogen worden. Es wird dabei die Berechnung von cos S und cos M auf rechtwinklige Dreiecke gebracht, indem ein Hülfsbogen (A) zu berechnen ist, welcher das Stück der scheinbaren Distanz darstellt, von der Mitte derselben bis zum Fusspunkte eines vom Zenith gefällten Lothes. Hiernach ist also $\frac{\sin s}{\sin m} =$ $\frac{\cos (\frac{1}{2} d + A)}{\cos (\frac{1}{2} d - A)}$ wenn m grösser als s ist; ferner wird $\frac{\sin m - \sin s}{\sin m + \sin s}$ $= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (m - s) \operatorname{cotg} \frac{1}{2} (m + s)$; ebenso giebt die Behandlung der zweiten Bruchform $\frac{\cos (\frac{1}{2} d + A)}{\cos (\frac{1}{2} d - A)}$ das gleichwerthige Resultat $\operatorname{tg} A . \operatorname{tg} \frac{1}{2} d$; die Formel von Witchell lautet daher so:

27) $\operatorname{tg} A = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} (m + s) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (m - s) \operatorname{cotg} \frac{1}{2} d$

$d' = d + r \operatorname{tg} s \operatorname{tg} (\frac{1}{2} d + A) - p \operatorname{tg} m (\frac{1}{2} d - A) +$ 3te Corr.

---

*) Im Naut. Alm. f. 1772 zuerst bekannt gemacht. In Robertson's Elements of Navigation, Edit. 1786, wird darüber so geurtheilt: The method, invented by Mr. Witchell, late head Master of the Royal Academy at Portsmouth, is perhaps the best adapted to the Disposition and Capacities of Seamen in general, as it is very short, requires the Logarithms only to four places .... and yet the result will be sufficiently exact.



Nach der Bedeutung von A ist hier cos S = tg s tg ($\frac{1}{2}$ d + A) und cos M = tg m tg ($\frac{1}{2}$ d — A). Der Zeichenwechsel von A tritt ein, wenn m kleiner als s ist, so dass immer die Summe $\frac{1}{2}$ d + A und die kleinere Höhe, die Differenz $\frac{1}{2}$ d — A und die grössere Höhe nebst ihrer Correction p oder r zusammen gehören. Ist ferner A kleiner als $\frac{1}{2}$ d, so ist die erste Correction +, die zweite —; ist A grösser als $\frac{1}{2}$ d, so sind beide Correctionen + oder beide —, je nachdem m oder s die grössere Höhe ist. Der Fall, dass $\frac{1}{2}$ d + A grösser als 90 Grad wäre, kann nicht vorkommen, weil diese Grösse eine Kathete bedeutet, zu welcher eine Zenithdistanz als Hypotenuse gehört. Die geschmeidige Form für ein Rechnungsschema und die einfache geometrische Bedeutung der Grössen, wobei sich ein erheblicher Rechenfehler nicht leicht verbergen kann, scheint die Methode von Witchell besonders hevorzugt zu haben. *)

Um die in Minuten und Secunden gegebenen Correctionen r und p nicht in Secunden zu verwandeln, bedienten Lyons und Witchell etc. sich der Proportionallogarithmen in den Requisite Tables (Tab. 15), welche nachher in alle nautisch-astronomischen Tafeln übergegangen sind (Janet Taylor T. 36). Die Proportional-Logarithmen wurden von Maskelyne zunächst für das Einschalten der berechneten Monddistanzen eingeführt. Das Interval ist daher 3 Stunden = 10800 Secunden und es bedeutet prop. log. $x = \log \frac{10800}{x}$. Hieraus folgt prop. log. x y = log $\frac{1}{y}$ + prop. log. x also ist z. B. proq. log. r tg s tg ($\frac{1}{2}$ d + A) in Witchell's Methode = pr. log. r + log cotg s + log. cotg ($\frac{1}{2}$ d + A). Diese Anwendung der Prop. Log. wird freilich entbehrlich, wenn die gewöhnlichen Logarithmentafeln den Numerus, als Secundenzahl gedacht, schon in Minuten und Secunden verwandelt am Rande angeben, wie es in mehreren neuen Tafeln geschieht.

Die „dritte Correction“ für die obigen Näherungsmethoden kann dadurch umgangen werden, dass man nach dem Princip

*) Vergl. W. v. Freeden: Handbuch der Nautik, Oldenburg 1864, p. 327.

von Legendre *) die Winkel S und M für diejenigen Punkte bestimmt, welche zwischen den scheinbaren und wahren Gestirnsörtern in der Mitte liegen. Nach dieser Methode von Legendre hat man also, wenn S_0 und M_0 die so berechneten Winkel bezeichnen:

$$28)\quad d' = d + r \cos S_0 - p \cos M_0$$

$$\cos S_0 = \frac{\sin\left(s - \frac{r}{2}\right) - \sin\left(m + \frac{p}{2}\right)\cos\left(d + \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(m + \frac{p}{2}\right)\sin\left(d + \frac{x}{2}\right)}$$

$$\cos M_0 = \frac{\sin\left(m + \frac{p}{2}\right) - \sin\left(s - \frac{r}{2}\right)\cos\left(d + \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(s - \frac{r}{2}\right)\sin\left(d + \frac{x}{2}\right)}$$

Die Grösse $x = d' - d$ ist dabei vorläufig unbekannt und kann erst bei der Wiederholung der Rechnung berücksichtigt werden, wenn man nicht schon einen genäherten Werth von x hat. Das Verfahren von Legendre, wobei die Form für die Cosinus der Winkel Nebensache ist, kann als eine Verbesserung aller vorhergehenden Näherungsmethoden dieser Art angesehen werden, und es besteht allgemein darin, dass man zu jeder der veränderlichen Grössen die Hälfte ihrer Aenderung hinzufügt. Man erreicht damit eine vollständige Berücksichtigung der Quadrate und Producte der kleinen Grössen r, p und x. Schon aus der Figur ergiebt sich nämlich darüber Folgendes. Setzt man einen Fuss des Zirkels in den Durchschnittspunkt der scheinbaren und wahren Distanz, so lassen sich die Correctionen, aus denen x besteht, auf zweierlei Art abschneiden, indem man entweder die Zirkelöffnung bis zu den wahren oder den scheinbaren Gestirnsörtern nimmt. Das Erste führt auf die Anwendung der Cosinus der Winkel an den scheinbaren Oertern, das Andere auf den Cosinus der Winkel an den wahren Oertern der Gestirne. In

*) Legendre, Mém. de l'Institut T. IV. 1805; Delambre Astronomie T. III 1814 p. 625.

beiden Fällen bleibt eine Correction vorbehalten, welche die Form eines kleinen Sinusversus hat, und diese Correction tritt mit entgegengesetzten Zeichen auf, so dass die Anwendung der dazwischen liegenden mittleren Oerter dieselbe Correction sehr nahe zum Verschwinden bringen muss. Vollständiger als es durch die Figur ohne grosse Weitläuftigkeiten möglich ist, zeigt die analytische Behandlung das Ergebniss der Correctionen und die Rechtfertigung der Methode von Legendre. Setzt man nämlich in der Grundgleichung (1):

$$\cos m \cos s \cos d' = \cos m' \cos s' \cos d - \sin m \sin s \cos m' \cos s' + \cos m \cos s \sin m' \sin s'$$

$d' = d + x$, $m' = m + p$, $s' = s - r$ und entwickelt nach dem Taylor'schen Satze oder, was hier auch genügen würde, mittelst der Reihen für sin und cosin, wonach $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 \ldots$, ebenso für sin p und cos p, für sin r und cos r die entsprechenden Ausdrücke, so wird nach den Potenzen geordnet:

$$29)\quad x = -p \frac{\sin s - \sin m \cos d}{\cos m \sin d} + r \frac{\sin m - \sin s \cos d}{\cos \sin d}$$
$$+ \frac{1}{2} (p^2 - x^2) \operatorname{cotg} d$$
$$+ p r \frac{\cos 2m + \sin m \sin s \cos d}{\cos m \cos s \sin d} + \frac{1}{2} r^2 \operatorname{cotg} d$$
$$+ \frac{1}{6} p.^3 \frac{\sin m \cos d - \sin s \cos 2m}{\cos m \sin d}$$
$$+ \ldots$$

Wird aber umgekehrt $d = d' - x$, $m = m' - p$, $s = s' + r$ überall eingesetzt, so nehmen die Glieder zweiter Ordnung genau dieselbe Form aber das entgegengesetzte Zeichen an, so dass hiernach die Grössen zweiter Ordnung durch das Verfahren von Legendre als vollständig berücksichtigt anzusehen sind.

Das Hauptglied der kleinen Correctionen, nämlich $\frac{1}{2} (p^2 - x^2) \operatorname{cotg} d . \sin 1''$ ist gewöhnlich unter dem Namen der „dritten Cor-

rection" allein berücksichtigt worden. Maskelyne*) gab es schon im Jahre 1764 an und verbesserte damit die Methode von Lacaille. Eine Tafel dafür ist in den Requisite Tables (Tab. 13) gegeben und danach in den meisten nautisch-astron. Tafeln wieder abgedruckt; in der Sammlung von Norie ist es die 35ste Tafel. Prof. Schaub**) hat auch eine Tafel für das Glied dessen Factor pr ist, mitgetheilt. Dass das erste Glied nicht immer genügt, zeigt z. B. die folgende Berechnung einer Beobachtung vom 28. Dec. 1846, wo $s = 3^0\ 27'$, $m = 15^0\ 44'$, $d = 132^0\ 11'\ 19''$, $p = 51'\ 38''$, $r = 14'\ 17''$ war und damit nach der obigen Formel (29) $x = -17'\ 32'',5 + 6'\ 1'',0 + 16'',5 - 0'',06 = -11'\ 36'',7$, mithin die wahre Distanz $d' = 131^0\ 59'\ 42''$ sich ergiebt. Die Methode von Legendre giebt damit übereinstimmend $x = -17'\ 43'' + 6'\ 7'' = -11'\ 36''$.

Die Untersuchung der geometrischen Bedeutung der Coefficienten in der Formel (29) führt zu dem Ausdruck, welchen schon Lexell***) dargestellt hat, nämlich in Beziehung auf die Winkel S und M:

$$30)\quad x = -p\cos M + r\cos S + \tfrac{1}{2}p^2\sin M^2\operatorname{cotg} d + pr\frac{\sin S\sin M}{\sin d} + \tfrac{1}{2}r^2\sin S^2\operatorname{cotg} d.$$

Die andere Classe der Näherungsmethoden giebt den Werth von x nicht ganz ohne Hülfe von x selbst, jedoch in solcher

*) Phil. Tr. f. 1764 p. 271.

**) Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie. Triest 1853. Nautische Tafeln dazu Triest 1853. Taf. 26 (zweite Verbesserung) enthält das Glied mit dem Factor pr, welches dort die Form hat:

$$+\frac{pr}{\sin d}(\cos s\cos m + \sin s\sin m\cos Z)$$

$$= pr\frac{\cos\Delta}{\sin d},$$ wo Z den Winkel am Zenith und Δ die gegenüberliegende Seite in dem durch Verlängerung über das Zenith hinaus entstandenen Complementar-Dreiecke bezeichnet. Ebenso in P. W. Tegner's Nautiske Astronomie, Kiöbenhavn 1840—44 p. 272, jedoch ohne Hülfstafeln für die Bestimmung dieses Gliedes.

***) Act. Petr. p. A. 1777. Petropoli 1780 p. 348.

Form, dass der Werth von x schon genähert bekannt geworden ist, wenn man ihn in der Rechnung gebraucht. Im Uebrigen entstehen diese Methoden aus den strengen Formeln durch die Abkürzung $\sin x = x$, nicht $\cos x = 1$, sondern $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2$, so dass nur die Grössen dritter Ordnung weggelassen werden. Zunächst bot sich dazu die Methode von D. Huber dar (Formel 18 oder 19). Da aber diese Formel erheblich vereinfacht wurde von Prof. Ligowsky (Formel 20 oder 21), so wird nur die letztere hier in Betracht kommen. Setzt man darin also $\sin \frac{p+r}{2} = \frac{p+r}{2}$, $\sin \frac{p-r}{2} = \frac{p\ \ r}{2}$, und $\sin \frac{1}{2} d'^2 - \sin \frac{1}{2} d^2 = \sin \frac{1}{2} (d' + d) \sin \frac{1}{2} (d' - d) = \sin \left(d + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \sin \left(d + \frac{x}{2}\right)$ so ist mit der Abkürzung $g = \frac{1}{2} (s + m + d)$:

$$31)\ x \sin \left(d + \frac{x}{2}\right) \cos m \cos s$$

$$= (p + r) \sin \left(m - s + \frac{p+r}{2}\right) \cos g \cos (g - d)$$

$$- (p - r) \sin \left(m + s + \frac{p-r}{2}\right) \sin (g - m) \sin (g - s).$$

wobei in der ersten Rechnung d für $d + \frac{x}{2}$ gesetzt werden kann, um für x einen Näherungswerth x′ zu erhalten, darau $x = \frac{x' \sin d}{\sin \left(d + \frac{x'}{2}\right)}$ und $d' = d + x$. Die Verschiedenheit der Zeichen ist zu berücksichtigen, da die erste Correction ihr Zeichen wechselt, wenn $m + \frac{p+r}{2}$ kleiner als s ist. Die zweite Correction wechselt das Zeichen, wenn p kleiner als r wird. Im Uebrigen ist $g = \frac{1}{2} (s + m + d)$ immer kleiner als 90° und grösser als jede der Höhen, so dass hierdurch kein neuer Zeichenwechsel entstehen kann. Wegen der schliesslichen Division mit $\cos m \cos s$ können sich die vorher berechneten Correctionen sehr stark vergrössern, so dass dabei die Decimaltheile der Se-

cunden alle mitzunehmen sind, so weit es die Anwendung von Logarithmen mit vier richtigen, wo nöthig interpolirten Decimalstellen gestatten, um x nicht ungenau zu erhalten.

Der Uebelstand, hierbei unter Umständen auf Tausendstel von Secunden rechnen zu müssen, um im Resultate nur die ganzen Secunden richtig zu erhalten, ist übrigens leicht zu beseitigen durch die vorherige Division mit cos m cos s, wodurch die Formel, wenn man den Winkel am Zenith Z wieder einführt, sich kürzer so schreiben lässt:

$$32)\quad x \sin\left(d + \frac{x}{2}\right) =$$

$$(p + r) \sin\left(m + \frac{p+r}{2} - s \right) \cos \tfrac{1}{2} Z^2$$

$$-(p - r) \sin\left(m + \frac{p-r}{2} + s\right) \sin \tfrac{1}{2} Z^2$$

welches auf die neuerdings von Prof. Ligowsky in Grunerts Archiv Th. 51 p. 377 und schon im Jahre 1863 Th. 40 p. 254 behandelte Formel hinauskommt. Für $\sin \frac{1}{2} Z^2$ und $\cos \frac{1}{2} Z^2$ hat man jetzt Hülfstafeln (Sine square der Engländer); aber auch ohne eine solche Hülfstafel ist diese Formel für den Gebrauch sehr zu empfehlen und verdient allgemeiner bekannt zu werden, da sie die Grössen 2ter Ordnung vollständig berücksichtigt und mit Logarithmen von 4 Decimalstellen die Rechnung in der Kürze erledigt, ohne besondere Hülfstafeln für eine 3te Correction in Anspruch zu nehmen.

Ferner gehört zu dieser Classe von Reductionsmethoden ein sehr beachtenswerthes Verfahren des vormaligen Navigationsexaminators, Capitainlieutenant Middelboe, welches in dessen Handbuch für den Navigateur, Flensburg 1854, S. 129 vorgetragen ist, wobei sich der Verfasser auf eine schon frühere Veröffentlichung dieser Methode aus dem Jahre 1844 bezieht. Die Reduction wird hier successive so ausgeführt, dass zunächst der Bogen d″ vom scheinbaren Mondsorte zum wahren Sonnen- oder Stern-Orte gesucht werden soll, und mit Hülfe desselben, nach einer ganz gleichmässigen Rechnung, auch die wahre Distanz

$= d'$. Setzt man $d'' = d + x$, so wird mit den bisherigen Bezeichnungen:

$$\cos d = \sin m \sin s + \cos m \cos s \cos Z$$

$$\cos d'' = \cos (d + x)$$
$$= \sin s \sin (s - r) + \cos m \cos (s - r) \cos Z$$
$$= \cos r \cos d - \sin r \cos m \sin Z \operatorname{cotg} S$$
$$= \cos r \cos d - \sin r \sin d \cos S$$
$$\cos d - \cos (d + x) = \cos d \, 2 \sin \tfrac{1}{2} r^2 + \sin r \sin d \cos S$$
$$= 2 \sin (d + \tfrac{1}{2} x) \sin \tfrac{1}{2} x = \sin x \sin d + 2 \sin \tfrac{1}{2} x^2 \cos d$$
$$\text{daher } \sin x = \sin r \cos S + 2 (\sin \tfrac{1}{2} r^2 - \sin \tfrac{1}{2} x^2) \operatorname{cotg} d$$

Eben so, wenn man jetzt den Bogen vom wahren Monds orte zum wahren Sonnenorte, also die wahre Distanz $= d' = d'' + x$ berechnen will mittelst des Winkels M am scheinbaren Mondsorte zwischen den Seiten $90^0 - m$ und $d'' = d + x$, während die gegenüberliegende Seite $= 90 - s$ ist, hat man die analoge Formel:

$$\sin x' = - \sin p \cos M + 2 (\sin \tfrac{1}{2} p^2 - \sin \tfrac{1}{2} x^2) \operatorname{cotg} d''$$

wo im letzten Factor unbedenklich d für d'' gesetzt werden kann.

Die Formeln von Middelboe werden daher, wenn man die kleinen Sinus mit den Bögen vertauscht und $\cos S = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} S^2$ nimmt:

$$33)\ \sin \tfrac{1}{2} S^2 = \frac{\cos \frac{1}{2} (s + m + d) \sin \frac{1}{2} (m + d - s)}{\cos m \sin d}$$

$$x = r - 2 r \sin \tfrac{1}{2} S^2 + \tfrac{1}{2} (r^2 - x^2) \operatorname{cotg} d$$

$$d'' = d + x$$

$$\sin \tfrac{1}{2} M^2 = \frac{\cos \frac{1}{2} (s' + m + d'') \sin \frac{1}{2} (m + d'' - s')}{\cos s' \sin d''}$$

$$x' = - p + 2 p \sin \tfrac{1}{2} M^2 + \tfrac{1}{2} (p^2 - x'^2) \operatorname{cotg} d''.$$

$$d' = d + x + x'.$$

Middelboe gebraucht statt der Höhen überall die Zenithdistanzen, welches auch der Gleichförmigkeit wegen (überall sinus zu haben) vorgezogen werden mag. Eine hinzugefügte kleine Hülfstafel für $\frac{1}{2} (r^2 - x^2)$ cotg d wird wohl entbehrlich, da man leicht $r^2 - x^2 = (r + x) (r - x)$ logarithmisch berechnen kann. Der einzige Zeichenwechsel liegt hier in der Cotangente

der Distanz bei den Grössen 2ter Ordnung, welche nach dieser Methode übrigens kurz und vollständig berücksichtigt werden.

In der folgenden hierher gehörigen Methode von Delambre,*) welche aus der Formel (4) hergeleitet werden kann, ist $1 - \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} = N$ gesetzt, und die Form wird damit zunächst in ihrer strengen, wenn auch in Beziehung auf x nicht ganz expliciten Gestalt:

$$\tfrac{1}{2} \sin d \sin x = N \cos g \cos (g - d)$$

$$- \sin \frac{p-r}{2} \sin \left(s + m + \frac{p-r}{2} \right) - \sin \tfrac{1}{2} x^2 \cos d,$$

und wenn man vom Sinus zum Bogen der kleinen Grössen übergeht:

$$34) \quad x \sin d = 2 N \cos g \cos (g - d)$$

$$- (p - r) \sin \left(m + s + \frac{p-r}{2} \right) - \tfrac{1}{2} x^2 \cos d,$$

$$N = 1 - \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \text{ zur Abkürzung gesetzt.}$$

Zur Berechnung von N sind aber 4 oder 5 Decimalstellen nicht hinreichend, und eine Hülfstafel für Log 2 N in Secunden, welche Rümker **) zur Erleichterung dieser Methode mittheilte, wurde zu umfangreich, um sich für den allgemeinen Gebrauch zu erhalten.

Dr. Bremiker***) führte in der Dunthorneschen Formel zwei Hülfsgrössen ein: d'' und D', so dass die zu berechnenden Formeln werden:

$$35) \quad \cos d'' = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos (s - m)$$

---

*) Astronomie Bd. III, Paris 1814 p. 621 ff.

**) Längenbestimmung durch den Mond. Hamburg 1849.

***) Astron. Nachr. 1850. Bd. 30. p. 311; Naut. Jahrb. f. 1852 von Dr. Bremiker, Berlin 1850.

$$\cos D = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos d$$

$$d' = D' + (s' - m' - d'') \frac{\sin \frac{1}{2}(s' - m' + d'')}{\sin \frac{1}{2}(d' + D')}$$

wo im Nenner wenigstens vorläufig d für d' gesetzt werden kann. Sollten aber die Höhen wenig von einander verschieden sein, so wird statt der Differenz der Höhen die Einführung ihrer Summen empfohlen, wozu man hier die Formel (4) anwenden kann. Diese zweite Methode von Bremiker ist mit Einführung der neuen Hülfsgrösse s'' die folgende geworden:

$$36) \quad \cos s'' = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos (s + m)$$

$$\cos D' = \frac{\cos s' \cos m'}{\cos s \cos m} \cos d$$

$$d' = D' + (s'' - s' - m') \frac{\sin \frac{1}{2}(s'' + s' + m')}{\sin \frac{1}{2}(d' + D')}$$

welche nur dann etwas unsicher würde, wenn beide Höhen sehr niedrig sind, ausserdem wie vorhin, wenn die Distanz sehr klein ist, und man nur 5 Decimalstellen der Logarithmen anwendet. Ein Zeichenwechsel tritt in beiden Formeln nicht weiter ein, als dass die Verschiedenheit der Zeichen für das Ergebniss der algebraischen Summen $s' - m' - d''$ in der ersten Formel und $s'' - s' - m'$ in der zweiten Formel zu berücksichtigen ist.

Ein ganz kunstloses indirectes Verfahren zur Reduction der Monddistanzen besteht endlich darin, den Winkel am Zenith mit den 3 Grössen s, m, d zu berechnen; ferner auch mit den 3 andern Grössen s', m', d + x dieselbe Rechnung auszuführen und dabei das gesuchte x vorläufig = 0 anzunehmen, dann aber so zu ändern, bis die Uebereinstimmung des Winkels erreicht ist. Borda hatte schon dies Verfahren angegeben, welches von Delambre*) weiter auszubilden gesucht wurde; doch ist das Ergebniss von keinem besonderen Werthe geworden. Dass der Winkel am Zenith auf beide Arten berechnet übereinstimmen

*) Astronomie III p. 627.

muss, kann übrigens zur Controlle einer berechneten wahren Distanz benutzt werden.

Eine für die Praxis wichtigere Frage, die sich schon bei der ersten Einführung des Problems der Monddistanzen darbieten musste, war aber diese, ob es nicht möglich sei, die ganze Distanz-Correction, ähnlich wie die Höhen-Correction in eine oder mehrere Tabellen zu bringen und damit also, für die Anwendung, aller Rechnung überhoben zu sein? Die grosse Verschiedenheit der Mondparallaxe (von 54′ bis 61′) findet sich freilich ebenso bei der Tafel für die Correction der Mondhöhen, indessen war sie doch das hauptsächlichste Hinderniss in der Ausführung einer Tafel für die Correction der Monddistanzen, da mit jeder Mondhöhe wieder eine bestimmte Sonnenhöhe und mit beiden eine bestimmte Distanz zu verbinden war. Nichts desto weniger hat man sich in England die Mühe gegeben, zunächst in Zahlentabellen den ganzen Betrag der Reduction der scheinbaren Distanz auf die wahre mit Rücksicht auf die mögliche Verschiedenheit der Fälle vorauszuberechnen; ferner auch nach einer graphischen Methode denselben Betrag für alle Fälle zu construiren, um daraus die gesuchte Reduction durch einfache Inspection abzumessen. Die ältesten Zahlentabellen dieser Art erschienen zu Cambridge*) im Jahre 1772. Die Berechnung soll von Witchell 1769 begonnen sein, sie wurde aber von Lyons, Parkinson und Williams vollständig ausgeführt. Die Revision und Veröffentlichung veranlasste Prof. Shepherd. Die Longitude Tables von Margetts**) erschienen 1794 in gr. Fol. zu dem Preise von 5 L. 10 S. Sie enthalten die in Curven construirten

---

*) Tables for correcting the apparent distance of the moon and a star from the effects of refraction and parallax. Publ. by order of the commissioners of longitude. Cambr. 1772. 1200 Seiten in Folio.

**) Margetts Longitude Tables for correcting the Effect of Parallax and Refraction, on the Distance observed between the Moon and Sun . . . found by inspection. London gr. Fol. Printed for and sold by the Author, Chronometer Maker. . . Die Vorrede, worin der Verf. dankt für die vom Board of Long. erhaltenen Prämien ist von George Margetts unterschrieben am 1. Dec. 1794.

Werthe der Reduction der scheinbaren Distanz auf die wahre, für die Werthe der Distanzen von Grad zu Grad, beginnend mit 20° und ausgedehnt bis 144°. Hinzugefügt sind noch graphische Tafeln zur Bestimmung des Stundenwinkels und des Azimuths aus der gegebenen geogr. Breite, der Declination und der Höhe eines Gestirns für die einzelnen Breitengrade von 0° bis 65° nördlicher Breite und von 0° bis 30° nördlicher oder südlicher Declination. Diese letzteren Kupfertafeln tragen die Inschrift: Published as the Act directs Juli 1st. 1790. Im Texte (24 Seiten in gr. Fol.) ist unter andern kleinen Hülfstafeln auch eine Tafel der Prop. Log. auf 5 Decimalstellen gegeben. — In sehr abgekürzter, handlicher Form wurden im Jahre 1815 von J. W. Norie*) die Linear Tables veröffentlicht, welche nur den Betrag der Refraction auf 24 Kupfertafeln in Octav geben und die noch übrige Correction für Parallaxe einer kleinen Rechnung überlassen.

Auch die Zahlentabellen der grossen Cambridger Tafeln wurden bedeutend abgekürzt, indem man sich auf die Angabe des Betrags der Refractionswirkung auf die Distanz beschränkte. Von der Art waren die Tables of Longitude, by John Turner, 2. Edit. by W. D. Snooke, London 1822 in 8°. Gegenwärtig sind solche Refractionstafeln noch als Longitude Tables von Thomsen, Mrs. Taylor und anderen im Gebrauch. Der amerikanische Capitain Elford reducirte den Betrag der Refractionswirkung auf eine einzige Folioseite, wobei jedoch die Distanzen nur von 10 zu 10 Graden und auch die Höhen verschiedentlich mit grösseren Intervallen angegeben werden. Wenn freilich dabei die Einschaltung zuweilen unsicher werden muss, so zeigte doch eine Revision dieser Tafel von Encke (Berlin. Astr. Jahrb. f. 1842), dass darin wenigstens keine sehr erheblichen Fehler vor-

---

*) A set of Linear Tables for correcting the apparent distance . . . for the Effect of Refraction, whereby Lyons Method of finding the true distance is rendered one of the easiest that have been proposed. By J. W. Norie, Teacher of Navig. and Naut. Astr. Printed for the author and sold by J. W Norie & Co. Navig. Warehouse. London 1815 in 8°.

kommen. Im Jahre 1821 hatte von Zach zu Genua diese Elford'sche Tabelle in der Corresq. astron. Vol. VI. p. 217 abdrucken lassen. Ein neuer Abdruck ist von Andr. Tonello besorgt in dessen Guida dei Navigante nelle osservazioni astronomiche, Venezia 1833.

Nimmt man die Wirkung der Refraction, welche stets eine positive Correction der Distanz geben muss, ferner auch die Sonnenparallaxe nebst den kleinen Correctionen der zweiten Ordnung aus den Tafeln, so reducirt sich die ganze übrige Rechnung auf die Formel:

$$d' = d - p' \cos M$$

wenn man unter p' hier nur die Höhenparallaxe des Mondes versteht, also $p' = P \cos m$, wo P die Horizontal-Par. ist. Lyons wählte dabei zur Bestimmung von cos M die Formel $\cos M = \frac{\sin s - \sin m \cos d}{\cos m \sin d}$ und damit wird diese Methode v. Lyons:

$$37)\ d' = d - P.\frac{\sin s}{\sin d} + P.\frac{\sin m}{\operatorname{tg} d} + \text{(Correction für Refr. etc. aus d. Taf.)}$$

welches die kürzeste Methode der Reduction der Monddistanzen überhaupt ist, wenn man sich nicht der einfachen Inspection der grossen englischen Tafeln selbst bedient. Die Sicherheit dieser kurzen Methode von Lyons (Formel 37) hängt nun von der Genauigkeit der Tafeln ab, welche den Betrag der Refraction nebst der Sonnenparallaxe einschliesslich der Corr. 2. Ordn. geben soll. In P. W. Tegner's Naut. Astron. Copenhagen 1847, und daraus in den Naut., astron. und logar. Tafeln von Tuxen, Copenhagen 1858, ist angeführt, dass die Zahlen der dort gegebenen Tafeln für den Betrag der Refr. etc. mit einer mittleren Refraction und einer mittleren Horizontal-Parallaxe des Mondes (57' 30") so berechnet sind, dass immer von der strenge berechneten wahren Distanz das Resultat $d - P\frac{\sin s}{\sin d} + P.\frac{\sin m}{\operatorname{tg} d}$ abgezogen sei, welches demnach der richtige Werth sein würde, wenn die mittlere Refraction und die mittlere Horizontal-Parallaxe wirklich stattfinden. Eine Aenderung der Parallaxe würde hier nur eine

kleine Aenderung der Grössen 2ter Ordnung, deren Hauptglied $\frac{1}{2}$ p^2 sin M^2 cotg d war, betreffen. Die Abweichung der Refraction aber von ihrem mittleren Werthe ist durch eine kleine Hülfstafel zu verbessern, wie z. B. Gordon in seinen Lunar and Time Tables, London 1849, p. 71 eine solche gegeben hat. Sie enthält nur die Verbesserung der mittleren Refraction wegen Barometer- und Thermometer-Standes, und zwar nach dem Betrage der Refraction selbst, nicht nach der Höhe, geordnet. Da nämlich diese Verbesserung dem Werthe der Refr. im Verticalkreise proportional ist, so wächst sie auch der Projection auf den Distanzbogen proportional und kann daher sogleich als Correction des Tafelwerthes angewandt werden.

Abgesehen von der obigen sehr umständlichen empirischen Berechnung des Einflusses der Refraction auf die Distanz, hat man Formeln für eine directe Berechnung dieser Refraction gegeben. Setzt man die Refraction im Verticalkreise = 57″,7 cotg s und 57″,7 cotg m, so giebt die Multiplication mit cos S und cos M, wenn dafür die Werthe wie in der Methode von Lyons gebraucht werden, den Einfluss der Refraction auf die Distanz:

$$\text{Refr.} = \frac{57'',7}{\sin d}\left(\frac{\sin s}{\sin m} + \frac{\sin m}{\sin s} - 2 \cos d\right)$$

und die Gesammtcorrection der Distanz, excl. der Grössen 2ter Ordnung wird:

$$38)\quad d' = d - P\frac{\sin s}{\sin d} + P\frac{\sin m}{\operatorname{tg} d} + \frac{57'',7}{\sin d}\left(\frac{\sin s}{\sin m} + \frac{\sin m}{\sin s} - 2 \cos d\right)$$

die Formel, womit Encke*) die Elfordsche Tabelle verglichen hat. Der Einfluss der Sonnenparallaxe = 9″ cos s cos S wäre noch hinzuzufügen, indessen können die vernachlässigten Grössen der 2ten Ordnung beträchtlicher als die Sonnenparallaxe werden.

Will man die Wirkung der Refraction und Parallaxe getrennt berechnen, so ist es am richtigsten, die Distanz zuerst von der Refraction zu befreien. Maskelyne**) hatte eine Form

*) Berliner Astron. Jahrb. f. 1842 p. 314.

**) Phil. Tr. f. 1762 p. 558. A Letter from the Rev. Nevil Maskelyne

dieser getrennten Berechnung schon gleich bei der Einführung der Monddistanzen aufgestellt, und bediente sich dabei bereits desselben Verfahrens, welches in der s. g. Methode von Witchell vorkommt, indem er setzt: $\cot g \frac{1}{2}(s+m) \, tg \frac{1}{2}(s-m) = tg A$, $tg A \cot g \frac{1}{2} d = tg B$, so ist die Refraction $= 2 R \frac{tg\, 2 A}{\sin 2 B}$, wo $R = 57'',7$ die Constante der Refr. bezeichnet. Dieser von den Zeitgenossen Lexell und Fuss gerühmte elegante Ausdruck Maskelyne's für die Wirkung der Refraction ergiebt sich aus der Formel, wonach die Refr. $= r \cot g\, s \cos S + r \cot g\, m \cos M$ zu setzen ist, und $\cos S = tg\, s\, tg(\frac{1}{2} d + B)$, $\cos M = tg\, m\, tg(\frac{1}{2} d - B)$ wie oben in der Formel von Witchell wird, so folgt durch weitere Transformation der angegebene kurze Ausdruck. Die Wirkung der Mondparallaxe berechnet Maskelyne mit demselben Hülfsbogen. Die Maskelyne'sche Formel für die Reduction der Monddistanzen wurde daher, wenn die beiden Correctionen für Refr. und Parallaxe wieder zusammen gefasst werden:

$$39) \quad tg A = \cot g \tfrac{1}{2}(s+m) \, tg \tfrac{1}{2}(s-m)$$
$$tg B = tg A . \cot g \tfrac{1}{2} d$$
$$d' = d + 115'',4 \frac{tg\, 2 A}{\sin 2 B} - P \sin m \; tg(\tfrac{1}{2} d + B).$$

Später fügte Maskelyne noch verschiedene Correctionen hinzu welche in Tafeln gebracht wurden. Schon 1761 (a. a. O.) wird bemerkt, dass die Refraction nicht den Tangenten der Zenithdistanzen einfach proportional zu setzen sei, sondern die Zenithdistanzen dabei um den dreifachen Betrag der Refraction zu vermindern wären, und mit Rücksicht auf diese Bradley'sche Regel sind auch die Hülfstafeln der Requisite Tables be-

(St. Helena Sept. 9. 1761) to the Rev. Th. Birch. — Dr. Mackay (Theory and practise of finding the Longitude, London 1809 p. 161) bemerkt über dieselbe Methode . . . commonly called Witchell's, but which was given by Mr. Emerson (see his Astronomy p. 318) and deduced from Lord Napier's Theorems, is inserted in the Requisite Tables. Die Schrift von William Emerson: A system of Astronomy, erschien übrigens 1769, geht also nicht so weit wie der angeführte Brief von Maskelyne zurück.

rechnet worden, welche bis zu 3° Höhe hinabgehen, und gleichfalls die Sonnenparallaxe mit aufnehmen.

§ 19. Die übrigen Correctionen für die Reduction der Monddistanzen: Berücksichtigung von Barometer und Thermometer, Verkürzung der Halbmesser durch die Refraction und Correction für die Abplattung der Erde.

Die Berücksichtigung des Barometer- und Thermometerstandes ist als selbstverständlich anzusehen, da eine Vernachlässigung des Einflusses dieser Umstände auf die Monddistanzen, besonders bei niedrigen Höhen am meisten das Resultat für die Länge fehlerhaft machen kann. Auch ist die betreffende Correction leicht anzubringen, da man sie unmittelbar für jede Höhe aus den Tabellen entnehmen kann. Selbst für den Fall, wo man schon den Betrag der mittleren Refraction für die Distanz abgesondert bestimmt hat, lässt sich durch eine kleine Hülfstafel, welche die Correction für Barometer und Thermometer nach den zugehörigen Werthen der Refraction geordnet giebt, diese Correction sogleich anwenden (§ 18).

Die Correction oder Verkürzung der Halbmesser der Gestirne durch die Strahlenbrechung ist demnächst zu berücksichtigen, da der gemessene kürzeste Abstand der Ränder von Sonne und Mond immer nur derjenige grösste Kreisbogen ist, welcher auf beiden nicht mehr kreisförmigen Rändern normal steht, und verlängert nicht nothwendig durch die Mittelpunkte dieser Gestirne geht. Man berechnet mit hinreichender Genauigkeit diesen Einfluss der Refraction, wenn man die Halbmesser nur in der Richtung der Mittelpunkte zu einander um den Betrag der Verkürzung durch die Refraction vermindert. Ist S der Winkel an der Mitte des Gestirns zwischen der Distanz und dem Verticalkreise, ϱ der Halbmesser ohne Refraction, so wird $\varrho \cos S$ als Höhenunterschied zwischen dem Mittelpunkte und dem Berührungspunkte oder beobachteten Punkte genähert angesehen werden können. Die entsprechende Refractionsänderung für diesen Höhenunterschied gilt für die verticale Richtung, so dass die gefundene Refractionsänderung mit cos S zu multipliciren ist,

um die Verkürzung in der schrägen Richtung zu erhalten. Die Formel für diese Berechnung hat sich dadurch noch einfacher gemacht, dass man den Rand des Gestirns durch die Refraction als elliptisch gekrümmt ansieht, also die Perpendikel l von diesem Rande auf den horizontalen Durchmesser den gleichliegenden Perpendikeln k der vollkommenen Kreisscheibe proportional setzt, mithin $\frac{k}{l} = \frac{\varrho}{\varrho'}$, wenn ϱ den unverkürzten, ϱ' den verkürzten verticalen Halbmesser bezeichnet. Hieraus folgt $\frac{\varrho - \varrho'}{\varrho} = \frac{k - l}{k}$ oder $k - l = (\varrho - \varrho') \cos S$; und wenn hierzu noch als fernere Näherung angenommen wird, dass die Linien von der Mitte der Scheibe nach den Endpunkten der Kreisperpendikel senkrecht durch den elliptischen Bogen gehen, so erhält man die gesuchte Verkürzung des Halbmessers in schräger Richtung $= (k - l) \cos S = (\varrho - \varrho') \cos S^2$. Der Betrag dieser kleinen Rechnung *) lässt sich aber auch aus den Hülfstafeln entnehmen (Bremiker Naut. Jahrb. Tab. XV und XVI; Domke Naut. astr. und log. Taf. Tab. XVIII). Die Verkürzung des Halbmessers durch die Strahlenbrechung hängt also von der Grösse desselben, von der Höhe des Gestirns und von dem Winkel S am Gestirne ab. Ist $S = 90^0$, so verschwindet sie, also bleibt der horizontale Halbmesser hiernach unverändert. Strenge genommen würde dieser horizontale Halbmesser wegen der Convergenz der Verticalkreise zum Zenith doch noch eine kleine Verminderung erleiden, welche in dem Falle, wo die scheinbare Höhe = 0, also die wahre Höhe unter 0 wäre, sogar in eine kleine Vergrösserung übergehen müsste, da die Verticalkreise unter dem Horizonte zum Nadir hin convergiren. Uebrigens wird der ganze Betrag der Veränderung des horizontalen

*) Nähere Untersuchungen darüber, woraus sich ergiebt, dass die kleinen Fehler der gemachten Voraussetzungen sich beinahe compensiren s. in L. Schwarz: Ueber die Reduction der scheinbaren und wahren Monddistanzen auf einander. Dorpat 1865.

Halbmessers durch die Refraction nur ein Bruchtheil einer Secunde, welcher in der Anwendung nicht zu berücksichtigen ist.*)

Für die Berechnung des Einflusses der Abplattung der Erde bei der Reduction der Monddistanzen hat man verschiedene Verfahrungsweisen vorgeschlagen. Zuerst könnte man, wie auch Delambre bemerkt, (Astronomie III. Th. p. 636), die Distanz von der Refraction allein befreien nach irgend einer der angeführten oder sonst gewählten directen oder indirecten Formeln. Die dann noch übrige Reduction auf den Mittelpunkt der Erde lässt sich einfach genug durch die Beziehung der Parallaxe auf das geocentrische Zenith bewirken, während man für die Refraction das geographische Zenith haben musste; daher die getrennte Berechnung beider Wirkungen. Multiplicirt man nun den Unterschied zwischen der geographischen und geocentrischen Breite mit dem Cosinus des Azimuths und addirt das Produkt zu der auf das geogr. Zenith bezogenen Höhe m oder s, so ist die Summe die Höhe μ oder σ bezogen auf das geocentrische Zenith, oder nach der Bezeichnung der Azimuthe der beiden Gestirne mit A und A′:

$$\mu = m + (\varphi - \psi) \cos A, \quad \sigma = s + (\varphi - \psi) \cos A'.$$

Hierzu dient übrigens schon die Tafel XVII im naut. Jahrb. von Bremiker. Die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe P

---

*) Ist ϱ der wahre Halbmesser, ϱ' der durch Refraction veränderte, h die scheinbare Höhe, h — r die wahre Höhe, so giebt das sphärische Dreieck die Formel für den Fall des horizonthlen Halbmessers:

$$\sin \varrho' = \frac{\cos h}{\cos (h-r)} \sin \varrho = \frac{\cos 45^0}{\cos 44^0\, 59'\, 2'',3} \sin \varrho = 0{,}999720 \sin \varrho$$

oder $\varrho - \varrho'$ wird für $\varrho = 16'$ nahe 0′′,27 als constante Verkürzung des horizontalen Halbmessers im Allgemeinen. Wird aber speciell h = 0 gesetzt, so erhält man $\sin \varrho' = \sin \varrho \sec r$ nach derselben Formel, also eine kleine Vergrösserung, welche für r = 34′ 45′′ den Betrag $\varrho - \varrho' = -$ 0′′.049 liefert d. h. der mit Refraction behaftete horizontale Halbmesser ϱ' wird 16′ 0′′,049. Von einer Contraction, auch in diesem Falle, die nur etwas kleiner als 0′′,27 sich ergäbe, wie im Lehrbuche von Albrecht und Vierow p. 361 angeführt wird, kann also eigentlich nicht die Rede sein. Der Irrthum rührt wohl daher, dass das negative Zeichen des dortigen $\cos (z + \frac{1}{2} r) = \cos 90^0\, 17'$ übersehen wurde, wodurch der Sinn der Contraction blieb, statt in das Gegentheil überzugehen.

ist dann mit dem Erdradius des Beobachtungsortes zu multipliciren oder die Tafel XVIII des naut. Jahrb. anzuwenden (Taf. 18 in Tuxen's Tafeln). Mit dieser reducirten oder localen Horizontalparallaxe P' und den auf das geocentrische Zenith bezogenen Höhen vollendet sich die Reduction auf den Mittelpunkt der Erde in gewöhnlicher Weise, indem man die scheinbaren Höhen μ und σ und die wahren Höhen $\mu' = \mu + P' \cos \mu$ und $\sigma' = \sigma + 9'' \cos \sigma$ anwendet. Statt der Sonnenparallaxe (9'') ist bei den Planeten deren Horizontalparallaxe zu nehmen, und für die Fixsterne die Parallaxe = 0 zu setzen.

Das Umständliche dieser getrennten Rechnungen über Refr. und Parallaxe zu vermeiden, ergab sich eine Abkürzung des Verfahrens zunächst dadurch, dass man die Refraction nach dem geocentrischen Zenith wirkend annimmt, also die Refraction wieder mit der geänderten Parallaxe vereinigte, welches auch keinen erheblichen Fehler übrig lässt.

Eine zweite Form der Vereinigung beider Rechnungen liess sich dadurch erreichen, dass man den Werth der Höhenparallaxe zwar für das geocentrische Zenith bestimmt, dann aber diesen Werth mit der Refraction zusammenfasst, und die Rechnung in Beziehung auf das geographische Zenith durchführt, nämlich mit denjenigen Höhen oder Zenithdistanzen, welche sich auf das geogr. Zenith beziehen. Für die hierbei erforderliche nachträgliche Verbesserung der so berechneten Distanz wegen der s. g. Seitenparallaxe des Mondes hat man in dem Dreiecke Z' Z M zwischen dem geocentrischen und geographischen Zenith nebst dem scheinbaren Mondorte, dessen Azimuth A ist, sin A

$$\sin Z' Z = \cos m \sin ZMZ', \text{ also } \sin ZMZ' = \frac{\sin A \sin Z Z'}{\cos m};$$

$p \sin Z M Z' = P' \cos m \sin Z M Z' = P' \sin A . \sin Z Z'$, wenn P' die locale Horizontalparallaxe des Mondes, p die Höhenparallaxe ist, also $p \sin Z M Z'$ sehr nahe der Abstand der wahren Mondörter M' und M'' in den beiden von M nach Z' und Z gezogenen grössten Kreisen. Dieser Abstand M' M'' wird die

Seitenparallaxe des Mondes genannt. Für $P' = 57'$ oder $\sin P' = \frac{1}{60}$ ist daher sehr nahe die

$$\text{Seitenparallaxe } M' M'' = \frac{Z Z'}{60} \sin A$$

in Secunden, wenn ZZ' ebenfalls in Secunden ausgedrückt ist. Taf. XIX im naut. Jahrb. enthält mit der Polhöhe, wovon ZZ' abhängt, und dem Azimuthe A des Mondes schon den Betrag der Seitenparallaxe. Multiplicirt man endlich die Seitenparallaxe $M' M''$ mit dem Sinus des Winkels zwischen der Distanz und dem Verticalkreise des Mondes, so erhält man mit hinreichender Näherung die gesuchte Correction der Distanz wegen der Seitenparallaxe des Mondes, also

$$\text{Correction der Distanz} = M' M''. \sin M$$

Auch diese Correction ist im naut. Jahrb. aus Taf. XX unmittelbar zu entnehmen mit den beiden Argumenten: Seitenparallaxe des Mondes $= M' M''$ und Winkel der Distanz mit dem Verticalkreise des Mondes $= M$.

Zur genauen Reduction der Monddistanzen mit Rücksicht auf alle kleinen Correctionen gab Bessel *) ein noch anderes Verfahren an, dessen Anwendung aber eine besonders eingerichtete Ephemeride voraussetzt, wie eine solche zwar in verschiedenen Jahrgängen vom Copenhagener Seekartenarchiv durch Schumacher veröffentlicht wurde, nachher aber wieder eingegangen ist, da sie zu wenig gebraucht wurde. — Eine Modification der Bessel'schen Methode zum Anschluss an die gewöhnlichen Ephemeriden ist von Chauvenet in Gould's Astronomical Journal **) gegeben worden. — Wegen der im naut. Jahrb. von Dr. Bremiker enthaltenen Hülfstafeln ist aber das darauf bezügliche Verfahren jetzt wohl am leichtesten ausführbar.

*) Astron. Nachr. Bd. 10. 1832 p. 17—62.

**) On a new method of correcting lunar distances for parallax and refraction. By W. Chauvenet, Prof. in the U. S. Naval Academy. — Astron. Journ. Vol. II. 1852 p. 24 ff. — Chauvenet's Tables for Correcting Lunar Distances sind auch abgedruckt in: The American Ephemeris and Naut. Alm. for the year 1855. Washington 1852.



V. Kapitel.

Die Coordinaten der Himmelskugel und ihre Verwandlung.

---

§ 20. Die sphärischen Coordinatensysteme.

Es sind vorzugsweise 4 Systeme gebräuchlich von rechtwinkligen sphärischen Coordinaten. Man kann sie auch als sphärische Polarcoordinaten ansehen, da der Pol eines dabei angenommenen Grundkreises zugleich als Coordinatenanfang gesetzt werden kann, und statt der einen sphärischen Coordinate ihre Ergänzung zu 90 Graden, statt der andern der eben so grosse sphärische Winkel an dem gedachten Pole zu nehmen ist.

1) Wird die Ekliptik als Grundebene gewählt, so hat man das System der Längen und Breiten mit dem Frühlingspunkte als Anfang der Zählung der Längen auf der Ekliptik.

2) Ist der Aequator als Grundebene gesetzt, mit dem Frühlingspunkte als Anfang, so entsteht das System der Coordinaten, welche Rectascension oder gerade Aufsteigung (ascensio sphaerae rectae oder ascensio recta) und Declination oder Abweichung (nämlich vom Aequator) genannt werden.

3) Soll der Aequator als Grundkreis bleiben, aber zum Anfangspunkte der Durchschnitt des Aequators mit dem oberen Theile des Meridians dienen, so bildet sich das Sy-

stem der Polardistanzen und Stundenwinkel, wobei die westlichen Stundenwinkel als positiv und bis zu 360° oder 24 Stunden gezählt werden können.

4) Wenn der Horizont als Grundkreis angenommen wird, so entsteht das Coordinatensystem der Azimuthe und Höhen. Man kann auf nördlicher Breite den Südpunkt des Horizontes als Anfangspunkt nehmen und das Azimuth nach Westen bis 360° herum zählen.

Unter diesen 4 Coordinatensystemen haben die beiden ersten einen allgemeinen, von der Lage des Beobachtungsortes unabhängigen Anfangspunkt, welcher nur den langsamen Veränderungen der Präcession und Nutation unterworfen ist. Die beiden letzten Systeme dagegen haben einen vom Meridiane des Beobachtungsortes abhängigen Anfangspunkt, und im vierten Systeme hängen die Coordinaten ausserdem noch von dem Horizonte, also von der Polhöhe ab. In der nautischen Astronomie sind es aber die Coordinaten dieses vierten Systems, von denen sich wenigstens eine, die Höhe, unmittelbar beobachten lässt. Alles Uebrige, welches für die Zeit- und Ortsbestimmung von Interesse ist, muss zunächst daraus durch Rechnung hergeleitet werden.

§ 21. Transformation der sphärischen Coordinaten.

1) Es sei die Rectascension α und die Declination δ eines Gestirns nebst der Schiefe der Ekliptik ε gegeben, so verwandelt man diese Coordinaten in Länge λ und Breite β durch die Formel:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\gamma,\quad \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha\frac{\cos(\gamma-\varepsilon)}{\cos\gamma},\quad \operatorname{tg}\beta = \sin\lambda\operatorname{tg}(\gamma-\varepsilon)$$

und berechnet zur Prüfung der Rechnung noch $\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta$.

2) Wenn umgekehrt aus der Länge λ und Breite β die Rectascension α und Declination δ zu bestimmen ist, so wird die Auflösung:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\lambda} = \operatorname{tg}(\gamma-\varepsilon);\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\lambda\frac{\cos\gamma}{\cos(\gamma-\varepsilon)};\ \operatorname{tg}\delta = \sin\alpha\operatorname{tg}\gamma$$

und die Gleichung $\cos \lambda \cos \beta = \cos \alpha \cos \delta$ zur Controlle der Rechnung.

3) Ist der Stundenwinkel t und die Declination δ eines Gestirns nebst der Polhöhe φ gegeben, so bestimmt sich die Höhe h und das Azimuth A desselben aus den Gleichungen:

$\cos t \operatorname{cotg} \delta = \operatorname{tg} q$, $\operatorname{cotg} A = \frac{-\operatorname{cotg} t \cos(\varphi + q)}{\sin q}$, $\operatorname{tg} h =$
$-\cos A. \operatorname{tg}(\varphi + q)$ und zur Prüfung noch $\sin t \cos \delta =$ $\sin A \cos h$.

4) Um aus der gegebenen Höhe h und dem Azimuthe A nebst der Polhöhe φ die beiden Coordinaten, genannt Stundenwinkel t und Declination δ zu berechnen, dienen die Formeln:

$$\cos A \operatorname{cotg} h = -\operatorname{cotg}(\varphi + q),\ \operatorname{cotg} t = \frac{-\operatorname{cotg} A \sin q}{\cos(\varphi + q)},$$
$$\operatorname{tg} \delta = \cos t \operatorname{cotg} q.$$

Zur Prüfung kann wieder die Gleichung $\sin t \cos \delta =$ $\sin A \cos h$ benutzt werden.

5) Sind aus zwei verschiedenen Systemen die Coordinaten δ und h wie auch die Polhöhe φ gegeben, deren Complement der Abstand der beiden Anfangspunkte, Pol und Zenith, von einander ist, und werden die beiden andern Coordinaten t und A gesucht, so sei $90 - \delta = p$ die Polardistanz; dann ist

$\sin \frac{1}{2} t^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi + p + h) \sin \frac{1}{2}(\varphi + p - h)}{\cos \varphi \sin p}$, $\sin \frac{1}{2} A^2$
$= \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi + h + p) \cos \frac{1}{2}(\varphi + h - p)}{\cos \varphi \cos h}$ wo auch hier zur Controlle die Formel $\sin t \cos \delta = \sin A \cos h$ dienen kann.

6) Wenn die Declination δ, der Stundenwinkel t und die Höhe h gegeben sind, und daraus das Azimuth A und die Polhöhe φ bestimmt werden soll, so wird die Auflösung:

$\sin A = \frac{\sin t \cos \delta}{\cos h}$, $\operatorname{tg} q = \operatorname{cotg} \delta \cos t$, $\operatorname{cotg}(\varphi \pm q) =$
$\mp \cos A \operatorname{cotg} h$

und als Prüfung noch $\sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi + h + p) \cos \frac{1}{2}(\varphi + h - p)}{\cos \varphi \cos h}$

oder $\cos \frac{1}{2} A^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (p + h - \varphi) \sin \frac{1}{2} (p + \varphi - h)}{\cos \varphi \cos h}$

Bei den zweifachen Resultaten dieser unbestimmten Aufgabe sind die beiden Azimuthwerthe um 180° von einander verschieden.

Wenn auch im weiteren Sinne die Auflösungen der Aufgaben der nautischen Astronomie meistens als Formeln für Coordinatenverwandlungen angesehen werden können, so erfordert doch die Rücksicht auf die hauptsächlich zu bestimmenden Grössen und deren specielle Erörterung vorzugsweise die Eintheilung in Breiten- und Zeitbestimmung nebst Längenbestimmung. Hieran schliessen sich noch die Azimuth- oder Amplitudenberechnungen zur Bestimmung der wahren Richtung der Magnetnadel.

VI. Kapitel.

Breitenbestimmungen.

§ 22. **Breitenbestimmung durch Höhenmessungen im Meridiane.**

1) Hat man die Höhe h eines Gestirns, dessen Declination δ ist, in der oberen Culmination beobachtet, so wird die geographische Breite oder Polhöhe φ bestimmt durch die Formel:

$$\pm \varphi = \pm (90 - h) \pm \delta$$

wo das obere Zeichen „nördlich" das untere „südlich" für alle drei Grössen bezeichnet. Es ist nur zu bemerken, dass die Zenithdistanz oder die Grösse 90 — h nördlich genannt wird, wenn die Höhe südlich d. h. über dem Südpunkte des Horizonts gemessen war, und umgekehrt. Der Sinn ist also, dass in dem Falle das Zenith sich nördlich vom Gestirn befindet, wenn die Höhe südlich ist, und dass Zenithdistanz und Declination zu addiren oder zu subtrahiren sind, je nachdem beide gleichnamig oder ungleichnamig werden. Endlich ist die Breite immer gleichnamig mit dem grössten von beiden.*)

2) Für die untere Culmination ergiebt sich aus der beobach-

*) In dieser Form ist es die zuerst in engl. Schriften vorkommende Regel, welche jetzt allgemein gebräuchlich geworden ist. Ueber das frühere Verfahren ist zu vergl. v. Zach in der Zeitschr. für Astronomie Oct. 1817 und Woltmann, der Verf. der früheren Ausgabe des Handb. d. Schifffahrtskunde 3. Aufl. Hamburg 1832. p. 279

teten Höhe h und der Polardistanz $90 - \delta$ die Breite als Summe von beiden, gleichnamig mit der Declination, also

$$\varphi = h + (90 - \delta)$$

3) Die Beobachtung der beiden Meridianhöhen h und h' in der obern und untern Culmination liefert die Polhöhe φ als halbe Summe beider Höhen:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(h + h')$$

unabhängig von der Declination, welche selbst daraus bestimmt werden kann durch die Formel

$$90 - \delta = \tfrac{1}{2}(h - h').$$

§ 23. Andere Fälle zur Breitenbestimmung durch Höhenmessungen allein.

Aus einer im ersten Vertical gemessenen Höhe h eines Gestirns von bekannter Declination δ bestimmt sich die Breite φ nach der Formel:

$$\sin\varphi = \frac{\sin\delta}{\sin h}$$

aber die Differentialformel hierzu $d\varphi = -\frac{tg\,\varphi}{tg\,h}\,dh$ zeigt, unter welchen Umständen eine solche Bestimmung besonders unsicher werden kann.

Hat man die gleichzeitigen Höhen zweier bekannten Sterne beobachtet, so, lässt sich dadurch die Breite bestimmen, indem man den Abstand der beiden Sterne von einander berechnen kann vermittelst ihrer bekannten Rectascension und Declination. Dieser Abstand in Verbindung mit den beiden bekannten Zenithdistanzen bestimmt die Lage des Zeniths in zweifacher Weise. Die Verbindung des Zeniths mit dem Pole giebt somit eine doppelte Auflösung für die gesuchte Breite. Das Detail dieser Auflösung ist weiter unten in dem s. g. Douwes'schen Problem zu behandeln.

§ 24. Breitenbestimmung durch Zeitmessungen allein.

Durch die Beobachtung des Zeitintervalls 2t zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange eines Gestirns durch

den ersten Vertical, lässt sich die Breite bestimmen nach der dem rechwinkligen sphärischen Dreiecke entnommenen Formel:

$$\text{cotg}\ \varphi = \cos t\ \text{cotg}\ \delta$$

und die Differentialformel dieser Gleichung

$$d\varphi = \tfrac{1}{2}\ \text{tg}\ t \sin 2\varphi .\ dt$$

ergiebt, dass diese Breitenbestimmung um so genauer werden muss, je kleiner t, also auch je kleiner die Zenithdistanz ist. Für Beobachtungen am Lande hat man daher in diesem Verfahren von Römer und Bessel *) eines der einfachsten und besten Hülfsmittel zur Polhöhenbestimmung mittelst eines im ersten Verticale aufgestellten Passagenintrumentes. **) Ist die Breite schon genähert bekannt, so wendet man zur genaueren Bestimmung derselben die Formel an: $\sin(\varphi - \delta) = 2 \sin \frac{1}{2} t^2 \sin \varphi \cos \delta$ oder für sehr kleine Zenithdistanzen:

$$\varphi = \delta + 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 \sin \varphi \cos \delta$$

wie sich aus der ursprünglichen Gleichung in der Form $\cos \varphi \sin \delta = \sin \varphi \cos \delta \cos t$ durch die Substitution von $\cos t = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} t^2$ ergiebt. Eine Hülfstafel für die Werthe von $2 \sin \frac{1}{2} t^2$ findet sich wegen des häufigen Vorkommens schon berechnet in verschiedenen Tabellensammlungen.

Andere Methoden, durch die Zeitmessung allein, die Polhöhe zu bestimmen haben zu geringen praktischen Werth, weil solche Beobachtungen für das beabsichtigte Ziel sich nicht genau genug ausführen lassen. Es würden dahin gehören: die Beobachtung der Länge des Tages oder der Nacht; die beobachtete Dauer des Untergangs der Sonnenscheibe; der beobachtete Zeitunterschied zwischen dem Untergange zweier bekannten Sterne etc.

---

*) Astron. Nachr. 1824 Bd. 3.

**) Es genügt dazu schon ein kleines tragbares Passageninstrument, wie es z. B. von dem Astronomen Preuss angewandt wurde auf den Landungsplätzen zu Kalifornien, Kamtschatka etc. bei der Reise um die Welt von O. v. Kotzebue (1823—26). S. a. Anwendung des Durchgangs-Instrumentes für die geogr. Ortsbestimmung. Zum Gebrauch der Offiziere des K. Russ. Generalstabes. Ausgearb. v. F. G. W. Struve. St. Petersburg 1833.



§ 25. Bestimmung der Breite durch Azimuthmessungen.

Um die Azimuthmessungen mit der für die Breitenbestimmung erforderlichen Genauigkeit ausführen zu können, dienen die Messinstrumente mit einem horizontalen Kreise oder Theodolithen, wie sie von dem englischen Mechanikus Ramsden genannt wurden. Die durch Hülfe einer Wasserwage (Niveau oder Libelle) zu bewirkende horizontale Stellung des eingetheilten Kreises bedingt eine feste Aufstellung des Instruments, wie sie nur auf Landstationen möglich ist.

Es kommen dabei u. A. folgende Fälle vor, dass entweder die Lage der Mittagslinie als bekannt angenommen wird, wenn die Azimuthe selbst gegeben sind, oder als unbekannt, wenn nur Differenzen der Azimuthe gegeben sein sollen. Die Breite ist zu bestimmen:

1) aus dem beobachteten gleichen Azimuthe zweier bekannten Sterne;
2) aus der Azimuthdifferenz zweier bekannten Sterne von gleicher aber unbekannter Höhe;
3) aus den beobachteten Azimuthen zweier bekannten Sterne; (dies ist ein Fall des s. g. Pothenotschen Problems für sphärische Dreiecke, indem der Pol und die beiden Sternörter die drei bekannten Punkte und das Zenith den gesuchten Punkt darstellt)
4) aus der Differenz der Azimuthe von drei bekannten Sternen, welches ein anderer Fall des Pothenotschen Problems für die Sphäre ist, wo die drei Sternörter die bekannten Punkte sind, und die Lage des Zeniths bestimmt werden soll;*)

---

*) Eine Auflösung der 4ten Aufgabe gab Rümker im Handbuch der Schifffahrtskunde, Hamburg 1850 p. 163, mittelst einer Gleichung vierten Grades. Mehrere complicirte Aufgaben dieser und ähnlicher Art sind in den älteren Schriften, namentlich in den Comment. Acad. Petrop. A. 1729—35 von Dan. Bernoulli, Hermann, Euler, Meier und Krafft, ferner in der Astronomie nautique von Maupertnis, Paris 1743, in der Astronomie des Marins (von Pezenas), Avignon 1746 etc. enthalten.

5) aus dem beobachteten grössten Azimuthe eines bekannten Circumpolarsterns.

Unter diesen Aufgaben ist die letzte für die Anwendung am wichtigsten. Ist A das beobachtete grösste Azimuth des Circumpolarsterns, wo nämlich das Azimuth stationär wird, δ die bekannte Declination des Sterns, so ergiebt das am Sternorte rechtwinklige Dreieck die Formel zur Bestimmung der Breite φ:

$$\cos \delta = \sin A \cos \varphi$$

und die Differentialformel in Beziehung auf A und φ, nämlich

$$d\varphi = \text{cotg } A \text{ cotg } \varphi . \, d A$$

zeigt, wie ein Beobachtungsfehler d A in diesem Falle nur einen geringeren Fehler d φ in dem Resultate der Breite hervorbringen kann, wenn A nicht kleiner als $90 - \varphi$ ist.

Beispiel. Von Prof. Böhm wurde am 20. Mai 1850 zur Polhöhenbestimmung von Innsbruck das östliche und westliche Azimuth des Sternes η Ursae maj. beobachtet, indem der Azimuthalkreis in der ersten Stellung $146^\circ 58' 11'',6$ und in der zweiten $4^\circ 47' 59'',1$ zeigte. Aus dem halben Unterschiede beider Ablesungen ergiebt sich $A = 71^\circ 5' 6'',2$ und mit der Declination des Sterns $= 50^\circ 3' 55'',6$ wurde hiernach die Polhöhe $= 47^\circ 16' 9'',4$. *)

§ 26. Breitenbestimmung durch combinirte Höhen- und Zeitmessungen.

Erster Fall.

Es sei eine Höhe h nebst dem Stundenwinkel t, wie auch die Declination δ eines Gestirns gegeben, so ergiebt sich die Breite φ zunächst aus den Formeln:

$$\cos t \text{ cotg } \delta = \text{tg } x, \quad \cos x \sin h = \sin \delta \cos y, \quad x \mp y = 90 - \varphi.$$

Das doppelte Zeichen giebt die beiden möglichen Auflösungen dieser insofern unbestimmten Aufgabe, als es sich dabei um die Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem

*) Methode, geogr. Breite und Azimut zugleich aus blossen Azimut-Beobachtungen der Circumpolarsterne ohne Kenntniss und Hülfe der Zeit auf das Genaueste zu finden, von Prof. Dr. Böhm. Prag 1855.



gegenüberliegenden Winkel handelt, wenn nicht etwa δ grösser als h wäre, wo nur eine einzige Auflösung stattfindet. Im Uebrigen muss bei der Anwendung die genähert bekannte Breite oder die beobachtete Lage des Gestirns gegen das Zenith über die Wahl des Resultats aus den beiden Auflösungen entscheiden.

Von den oben gegebenen strengen Formeln für die Auflösung des Problems kann die zweite Formel unsicher werden, wenn x nahe an 90^0 und y sehr klein ist. Zur Vermeidung dieser Unsicherheit könnte man sich dann der Formeln bedienen, in denen das Perpendikel p benutzt wird:

$$\cos t \operatorname{cotg} \delta = \operatorname{tg} x, \ \sin t \cos \delta = \sin p, \ \sin h = \cos p \cos y$$
$$x \mp y = 90^0 - \varphi.$$

Uebrigens zeigt auch die Grundgleichung des zu berechnenden Dreiecks:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

dass die gesuchte Grösse φ von einer quadratischen Gleichung in Beziehung auf $\sin \varphi$ oder $\cos \varphi$ abhängt, und daher im Allgemeinen zwei verschiedene Resultate der Auflösung giebt.

Am meisten gebräuchlich ist noch für diese Aufgabe die genäherte Auflösung, welche sich aus der Substitution von $\cos t = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} t^2$ aus der letzten Gleichung ergiebt, nämlich:

$$\cos (\varphi - \delta) = \sin h + \cos \varphi \cos \delta . 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2$$

wo für die Grösse φ auf der rechten Seite ihr genähert bekannter Werth zu setzen ist. Es wird dabei, wie überhaupt in der Anwendung dieser Aufgabe vorausgesetzt, dass t möglichst klein und h, also auch das Complement von $\varphi - \delta$, nicht zu nahe an 90^0 sei. Die Differenzirung der Grundgleichung nach φ und t giebt nämlich $d\varphi = \frac{\sin t}{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{cotg} \varphi \cos t} dt$, und wenn man den Azimuthwinkel A desselben Dreiecks einführt mittelst der andern Grundgleichung $\sin t \operatorname{cotg} A = \cos \varphi \operatorname{tg} \delta - \sin \varphi \cos t$, so wird

$$d \varphi = \cos \varphi \operatorname{tg} A . dt$$

woraus auch folgt, dass der Fall $A = 90^0$, also die Nähe des ersten Verticals zu vermeiden ist.

Beispiel 1. In Kiel beobachtete ich am 29. Oct. 1850, als die Uhr $11^h 31^m 8^s$ zeigte, die doppelte Höhe des untern

Sonnenrandes $= 43^{0}\ 58'\ 54''$. Die Uhr war $1^{m}\ 12^{s}$ zurück gegen mittl. Zeit in Kiel und der Indexfehler des Sextanten $15''$ zu subtrahiren. Hiermit ergab sich $h = 22^{0}\ 13'\ 15''$, $t = 0^{h}\ 11^{m}\ 32$, da die Zeitgleich. $16^{m}\ 8^{s}$ und die Declin. $\delta = 13^{0}\ 25'\ 29''$ war, die gesuchte Breite $\varphi = 54^{0}\ 18'\ 26''$.

Beispiel 2. Zu Vitoria im nördlichen Spanien ist am 15. Juli 1860 mit einem kleinen Prismen-Kreise (Patentkreis v. Pistor und Martins) die doppelte Höhe des untern Sonnenrandes $= 136^{0}\ 21'\ 0''$ von mir beobachtet worden, als ein Chronometer $0^{h}\ 30^{m} 46^{s}$ zeigte. Das Chronometer war $38^{m} 56^{s}$ voraus gegen die mittlere Ortszeit, der Collimationsfehler des Instruments $= + 1'\ 0''$, die Zeitgleichung $5^{m}\ 39^{s}$ von mittlerer Zeit zu subtrahiren, die Declination der Sonne $= 21^{0}\ 28'\ 28''$. Mit der wahren Höhe $h = 68^{0}\ 26'\ 27''$ und dem Stundenwinkel $t = 0^{h}\ 13^{m}\ 49^{s}$ fand sich demnach die Breite des Beobachtungsortes $\varphi = 42^{0}\ 50'\ 22''$ nördlich.

Auf den Polarstern angewandt liefert dieselbe Aufgabe noch den Vortheil, dass dieser Stern nur $1\frac{1}{2}$ Grade vom Pole entfernt ist, und derselbe daher die Bedingung eines möglichst kleinen Stundenwinkels nicht mehr erfordert; ferner dass bei einer genäherten Bestimmung das kleine Dreieck zwischen dem Pole, dem Sterne und dem Fusspunkte des auf den Meridian gefällten Perpendikels als geradliniges Dreieck berechnet werden kann, so dass die Correction c, welche den Unterschied zwischen der Höhe des Sterns und des Pols darstellt, schon durch die Formel $c = (90 - \delta) \cos t$ zu geben ist, und die Breite selbst daher nach der Formel

$$\varphi = h - (90 - \delta) \cos t$$

genähert bestimmt zu werden pflegt.

Die strenge Auflösung des sphärischen Dreiecks würde geben:

$$\cos t \operatorname{cotg} \delta = \operatorname{tg} c$$
$$\cos c \sin h = \sin \delta \sin (\varphi + c).$$

Um aber auch diese genaue Berechnung mit Logarithmen von wenigen Decimalstellen zu erreichen, hat man den Unter-

schied zwischen φ und h bestimmt. Setzt man zu dem Ende in der Grundgleichung:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

$\sin\delta = 1 - 2\sin(45 - \frac{1}{2}\delta)^2$ und $\sin h - \sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}(h-\varphi)$ $\cos\frac{1}{2}(h+\varphi)$, so wird

$$2\sin\tfrac{1}{2}(h-\varphi) = \frac{\cos\varphi\cos\delta\cos t}{\cos\frac{1}{2}(h+\varphi)} - \frac{2\sin\varphi\sin(45-\frac{1}{2}\delta)^2}{\cos\frac{1}{2}(h+\varphi)}$$

wo für das φ auf der rechten Seite der Gleichung ein ungefähr bekannter Näherungswerth zu setzen ist.

Ferner hat man durch Reihenentwickelung nach den Potenzen der kleinen Polardistanz, Auflösungen für diese Aufgabe (von Littrow u. A.) mit besonderer Hülfstafeln zur Erleichterung der Rechnung gegeben. Z. B. in der Domke'schen Tafelsammlung Tab. XXXI. Für genauere Rechnungen können die Tafeln in Dr. Bremiker's Naut. Jahrb. Tab. II oder im Naut. Alm. Tab. II und III dienen.

Um die in diesen Tafeln gebrauchten Formeln (von Littrow*)) zu erhalten, kann man entweder die Grösse $x = h - \varphi$ aus der Grundgleichung $\sin h = \sin(h-x)\sin\delta + \cos(h-x)\cos\delta\cos t$ entwickeln, oder auch der obigen Gleichung $\cos t \operatorname{cotg}\delta = \operatorname{tg} c$ noch hinzufügen $\cos A \operatorname{cotg} h = \operatorname{cotg}(\varphi + c)$, und zur Eliminirung des Azimuthwinkels A ferner:

$$\sin A = \frac{\cos\delta\sin t}{\cos h},\ \cos A = \sqrt{1 - \sin A^2} = 1 - \tfrac{1}{2}\sin A^2 - \tfrac{1}{8}\sin A^4 - \ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\frac{\cos\delta^2\sin t^2}{\cos h^2}$$ mit Weglassung der Glieder der 4ten und höhern Ordnung, da $\cos\delta$ eine sehr kleine Grösse ist. Die Substituirung dieses Werthes von cos A giebt

$$\operatorname{cotg} h - \tfrac{1}{2}\frac{\cos\delta^2\sin t^2}{\cos h\sin h} = \operatorname{cotg}(\varphi + c),$$

*) J. J. Littrow, Berliner Astron. Jahrb. f. 1825 p. 174; Schaub: Leitfaden für den Unterricht in der Naut. Astron. Triest 1853 p. 137.

$$\operatorname{cotg} h - \operatorname{cotg}(\varphi + c) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\cos\delta^2 \sin t^2}{\cos h \sin h} = \frac{\sin(\varphi + c - h)}{\sin(\varphi + c)\sin h},$$

daher $\tfrac{1}{2}\,\frac{\cos\delta^2 \sin t^2}{\cos h} = \frac{\sin(\varphi + c - h)}{\sin(\varphi + c)}$ oder

$$(\varphi + c - h)\sin 1'' = \tfrac{1}{2}\sin(\varphi + c)\,\frac{(90 - \delta)^2 \sin t^2 \sin 1''^2}{\cos h}$$ und

wegen der nahen Gleichheit von $\varphi + c$ und h auch noch

$$\frac{\sin(\varphi + c)}{\cos h} = \operatorname{tg} h.$$

Ferner kann c genähert durch $c = (90 - \delta)\cos t$ gegeben werden, daher

$$\varphi = h - (90 - \delta)\cos t + \tfrac{1}{2}(90 - \delta)^2 \sin t^2 \operatorname{tg} h \sin 1''.$$

Beispiel. Auf dem Höhenkreise eines Theodolithen (Universalinstruments) von Martins habe ich zu Kiel am 18. Septbr. 1851 die Richtung des Polarsterns 323° 50′ 10″ abgelesen, und nachdem das Instrument eine halbe Umdrehung um die verticale Axe gemacht hatte und die Richtung des Sterns wieder eingestellt war (so dass die optische Axe des Fernrohrs die doppelte Zenithdistanz durchlaufen haben musste) wurde die Ablesung = 36° 7′ 20″. Hiernach ist die doppelte Zenithdistanz = 72° 17′ 10″ gewesen, also die observirte Höhe = 53° 51′ 25″, wovon noch die Refraction = 42″ abgezogen, h = 53° 50′ 43″ gab. Ausserdem war der Stundenwinkel $t = 7^h\, 9^m\, 41^s$ bekannt und die Declination $\delta = 88°\ 30'\ 55''$. Es folgt hieraus für die Polhöhe $\varphi = 54°\ 18'\ 55''$. Der Beobachtungsort (die vormalige Seekadettenschule) lag 19″,8 südlicher als die Nicolaikirche, so dass die Breite dieses letzteren Ortes = 54° 19′ 15″ wurde. Aus den abgelesenen Differenzen des horizontalen Kreises zwischen den beiden Objecten: Thurm- und Polarstern ergab sich noch nebenbei für die Bestimmung der Mittagslinie die azimuthale Richtung des Beobachtungsortes zur Nicolaikirche = 39° 28′ 8″ von Süden nach Westen.

Hierher gehört ferner die Methode der Breitenbestimmung aus Circummeridianhöhen, welche in einer Vervielfältigung

der beobachteten Höhe in der Nähe des Meridians besteht. Bezeichnet h_0 die Meridianhöhe, se giebt jede beobachtete einzelne Höhe h die Gleichung

$$\cos(\varphi - \delta) = \sin h + 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 \cos \varphi \cos \delta = \sin h_0$$

oder $\sin h_0 - \sin h = 2 \sin \frac{1}{2} t^2 \cos \varphi \cos \delta = 2 \sin \frac{1}{2} (h_0 - h) \cos \frac{1}{2} (h_0 + h)$.

Addirt man beiderseits 2 h und setzt $h_0 - h = \Delta h$, also $h_0 + h = 2h + \Delta h$, so wird die vorhergehende Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta h. \cos (h + \tfrac{1}{2} \Delta h) = \sin \tfrac{1}{2} t.^2 \cos \varphi \cos \delta$$

und wenn Δh sehr klein ist, kann auch $\cos(h + \frac{1}{2} \Delta h) = \sin(\varphi - \delta)$ gesetzt werden, daher:

$$\Delta h = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2 \cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta). \sin 1''}.$$

Eine Hülfstafel für $\frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ dient zur Erleichterung dieser Rechnung.

In der Domke'schen naut. astr. Tafel XXXIX ist der log $2 \sin \frac{1}{2} t^2$ für den log rad = 5 gegeben, so dass die Constante 0,31443 = 5 + log 206265 zum „log des Stundenwinkels" dieser Tafel zu addiren ist, um $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ zu erhalten.

B e i s p i e l. In Kiel wurden am 29. October 1850 auf der Seekadettenschule folgende Sextantenbeobachtungen angestellt:

Chronometerzeit	Doppelte Sonnenhöhen
11h 26m 57s	43° 54′ 30″
29. 10.	43. 57. 0.
30. 23.	43. 58. 45.
32. 34.	44. 0. 30.
36. 36.	44. 3. 45.

Das Chronometer (von Jürgensen) war 1^m 12^s zurück gegen mittlere Zeit in Kiel. Der Indexfehler des Sextanten (v. Filby) betrug — 15″, die Declination der Sonne = - 13° 25′ 39″, die Zeitgleichung 16^m 8^s. Der für die Beobachtungsreihe constante Logarithmus von $\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$ wird = 9,78769 und die wahre Höhe im arithmetischen Mittel aus den verschiedenen Beobachtungen h = 22° 13′ 15″. Ferner wurde für die mittlere Reduction auf den Meridian, nämlich das Mittel aller $2\sin\frac{1}{2}t^2$ multiplicirt mit $\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$ berechnet 2′ 53″, folglich ist die Meridianhöhe h_0 = 22° 16′ 8″ und die Breite φ = 54° 18′ 13″.

Die einzelne Berechnung dieser Höhen würde gegeben haben:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= 54^\circ\ 18'\ 21''\\
& 18.\ 24.\\
& 18.\ \ 9.\\
& 18.\ 15.\\
& 17.\ 57.\\
\hline
\text{Mittel}\ \varphi &= 54.\ 18.\ 13.
\end{aligned}
$$

Hätte man dagegen das einfache Mittel aus den Höhen mit dem Mittel aus den Stundenwinkeln zu einer einzigen Beobachtung vereinigt berechnet, so wäre φ = 54° 18′ 26″ geworden, welches weniger genau ist, da die Höhen sich nicht genau der Zeit proportional ändern.

Für die in besonderen Fällen erforderliche noch genauere Berechnung der Circummeridianhöhen kann man in der strengen Formel

$$2\sin\tfrac{1}{2}\Delta h = 2\sin\tfrac{1}{2}t^2\ \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\cos(h+\frac{1}{2}\Delta h)}$$

die Entwickelung vornehmen:

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta h = \tfrac{1}{2}\Delta h - \tfrac{1}{8}.\frac{\Delta h^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\Delta h = \Delta h - \tfrac{1}{24}.\Delta h^3 + \ldots$$

$$\Delta h = 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos (h + \frac{1}{2} \Delta h)} + \tfrac{1}{24} \Delta h^3$$

$$\Delta h = 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos (h + \frac{1}{2} \Delta h)} + \frac{8 \sin \frac{1}{2} t^6}{24} \cdot \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos (h + \frac{1}{2} \Delta h)} \right)^3 .$$

In den Hülfstafeln von Delambre (Astronomie II. p. 263) so wie in der Schumacher'schen Sammlung von Hülfstafeln, giebt eine Tafel den Werth $m = 2 \sin \frac{1}{2} t^2$ und eine zweite Tafel $\frac{m^3}{24} = \frac{8 \sin \frac{1}{2} t^6}{24}$.

Zweiter Fall.

Das Douwes'sche Problem.

Die Aufgabe, aus zwei Höhen nebst der verflossenen Zeit und der bekannten Declination eines Gestirns, die Breite und den Fehler der Uhr zu finden, war seit Jahrhunderten bekannt gewesen, als der holländische Mathematiker am Admiralitäts-Collegium zu Amsterdam, Cornelius Douwes, im Jahre 1755 *) durch die Bekanntmachung besonderer Hülfstafeln die Auflösung dieses Problems zu erleichtern suchte, und damit die allgemeine Einführung für den Seegebrauch veranlasste.

Die Auflösung von Douwes benutzt einen genäherten Werth der Breite φ, um zunächst den Stundenwinkel zu bestimmen, womit nachher die Auflösung genau auf den vorigen Fall der Breitenbestimmung durch eine Höhe ausserhalb des Meridians zurückgeführt und auch ebenso beendigt wird. Diese genäherte Auflösung ergiebt sich aus den Grundgleichungen:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$
$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t'$$

$$\sin h - \sin h' = \cos \varphi \cos \delta (\cos t - \cos t')$$
$$= 2 \cos \varphi \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} (t' + t) \sin \tfrac{1}{2} (t' - t).$$

Durch die Verbindung der so gefundenen halben Summe der Stundenwinkel mit ihrer aus den Uhrzeiten bekannten halben Differenz, wird auch der kleinere Stundenwinkel t bekannt,

*) Verhandling om buiten den middag op zee de waare middagsbreedte te finden (Verh. der Maatsch. Harlem. I 1755).



welcher zu der grösseren Höhe h gehört, und die Breite φ ist demnach durch die Schlussformel zu bestimmen, wie in der Aufgabe der Breitenberechnung vermittelst einer Höhe in der Nähe des Meridians. Die Methode von Douwes ist also in den beiden Formeln enthalten:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2}(t' + t) &= \frac{\sin h - \sin h'}{2 \cos \varphi \cos \delta \sin \tfrac{1}{2}(t' - t)} \\ \cos(\varphi - \delta) &= \sin h + 2 \sin \tfrac{1}{2} t.^2 \cos \varphi \cos \delta \end{aligned}\right\} \text{I}$$

wobei auf der rechten Seite φ genähert anzunehmen ist. Das t in der letzten Gleichung findet sich aus der Subtraction von $\frac{1}{2}(t' + t) - \frac{1}{2}(t' - t)$. Sollte es beträchtlich von dem gefundenen abweichen, so wird eine Wiederholung mit dem verbesserten Werthe von φ erforderlich. Die Hülfstafeln von Douwes geben 1) $\log \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(t'-t)} = \log \frac{1}{2}$ verloopen Tyd; 2) $\log 2 \sin \frac{1}{2}(t' + t) = \log$ Middel Tyd; 3) $\log 2 \sin \frac{1}{2} t^2 = \log$ Ryzing. In den Tafeln von Norie sind es die Tafeln XXVII, XXVIII und XXIX. Man sieht, dass die Ersparung der Rechnung durch diese Hülfstafeln, mit Ausnahme der letzten, nicht sehr erheblich ist. Die Douwes'schen Hülfstafeln waren aber auch sehr nützlich durch ihre Beschränkung auf 5 Decimalstellen, während man sonst fast alle nautischen Rechnungen, auch die geringfügigsten, mit 7stelligen Logarithmen auszuführen sich gewöhnt hatte.

Zur Beurtheilung einer zweckmässigen Wahl der Beobachtungen für die Anwendung dieser Aufgabe kann man sich den Ort des Zeniths vermittelst des Durchschnitts zweier Kreise construirt denken, deren sphärische Halbmesser die Zenithdistanzen sind. Liegen beide Gestirnsörter nahe in demselben Verticalkreise, so fällt dieser Durchschnitt sehr unsicher aus. Der Fall, wo das Azimuth der Gestirne in beiden Beobachtungen entweder gleich oder um 180 Grade verschieden ist, muss also vermieden werden; wogegen eine Azimuthdifferenz von 90 Graden im Allgemeinen der günstigste Fall ist, und zwar so, dass die eine Höhe in der Nähe des Meridians, die andere in der Nähe des ersten Verticals zu nehmen ist. Die Auflösung

von Douwes kann übrigens auch dadurch unsicher werden, dass $\varphi - \delta$ sehr klein, also durch $\cos(\varphi - \delta)$ nicht genau zu bestimmen ist.

Andere Auflösungen nach strengen Formeln bietet zunächst die Berechnung der Aufgabe aus den einzelnen sphärischen Dreiecken. Der Wunsch nach Abkürzung dieser Berechnungsweise hat zu verschiedenen Methoden*) der directen Auflösung geführt, worunter besonders die Methode von W. L. Krafft **) zu bemerken ist. Man ist bei verschiedenen Bearbeitungen darauf gekommen und benennt sie daher auch als Methode von Ivory ***) oder von Lobatto und Hazewinkel. Es ist aber mit einer nur geringen Verschiedenheit in der Form die Methode von Krafft. †) Nach Ivory wird gesetzt:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}(t' - t) = \sin a; \quad 2)\ \sin\delta \sec a = \cos b \\ 3)\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}(h - h')\cos\frac{1}{2}(h + h')}{\sin a} = \sin c; \\ 4)\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}(h - h')\sin\frac{1}{2}(h + h')}{\cos a \cos c} = \cos d \\ \text{so ist } 5)\ \cos c \cos(b \mp d) = \sin\varphi. \end{array}\right\} \text{II}$$

Das doppelte Zeichen giebt die beiden möglichen Auflösungen an.

---

*) Küstner, Astron. Abh. I p. 413. Schubert, Berlin. Astron. Jahrb. für 1790.

**) W. L. Krafft, Nova Acta Petrop. Tom. IX ad A. 1791 p. 353. Présenté 13. Oct. 1794.

***) Ivory, Philos. Mag. Aug. 1821.

†) Krafft setzt, indem er die Höhen mit H und h, die verflossene Zeit mit Θ, die Breite mit l bezeichnet:

$$\frac{\sin H - \sin h}{2} = A, \quad \frac{\sin H + \sin h}{2} = B,$$

$$\frac{A}{\sin\frac{1}{2}\Theta\cos d} = \sin\alpha, \quad \frac{\operatorname{tg} d}{\cos\frac{1}{2}\Theta} \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{B\cos\beta}{\cos\alpha\cos\frac{1}{2}\Theta\cos d} = \sin\gamma, \quad \begin{array}{l}\beta - \gamma = \Delta \\ \beta + \gamma = \Sigma\end{array}$$

so wird $\sin l = \cos\alpha\cos\Delta$

und auch $\sin l = -\cos\alpha\cos\Sigma$.

Die geometrische Bedeutung der Grössen a und b ist sogleich in der Figur ersichtlich. Die Grössen c und d ergeben sich durch Subtraction und Addition der beiden Gleichungen, worin f und g die gleichfalls aus der Figur ersichtliche Bedeutung haben:

$$\sin h = \cos a \cos f + \sin a \sin f \sin g$$
$$\sin h' = \cos a \cos f - \sin a \sin f \sin g.$$

so dass $\frac{\sin h - \sin h'}{2 \sin a} = \sin f \sin g = \sin c$; $\sin h + \sin h' = 2 \cos a \cos f = 2 \cos a \cos c \cos d$ u. s. w., womit sich der Beweis für die Formeln leicht erledigt. Die Methode von Krafft ist also durch die kleine Umformung von Jvory ganz für die logarithmische Rechnung eingerichtet.

Noch eine fernere kleine Veränderung dieser Formeln, vorgeschlagen von Prof. Ligowski, wodurch ein Log. erspart wird, besteht in der folgenden Zusammenstellung:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \operatorname{cotg} \delta \cos \frac{1}{2}(t' - t) = \operatorname{tg} b \\ 2)\ \dfrac{\sin \frac{1}{2}(h - h') \cos \frac{1}{2}(h + h')}{\cos \delta \sin \frac{1}{2}(t' - t)} = \sin c \\ 3)\ \dfrac{\cos \frac{1}{2}(h - h') \sin \frac{1}{2}(h + h') \cos b}{\sin \delta \cos c} = \cos d \\ 4)\ \cos c \cos (b - d) = \sin \varphi. \end{array}\right\} \text{II*}$$

Ein etwas anderes directes, aber weniger bekanntes Verfahren, wobei wie in der Methode von Douwes auch die s. g. natürlichen Sinus gebraucht werden, ist ebenfalls zuweilen in Anwendung gekommen und für die Anlage eines Rechnungsschema's sehr geeignet. Es folgt nämlich aus der weiteren Entwickelung der letzten Gleichung:

$\sin \varphi = \cos c \cos (b \mp d) = \cos c \cos b \cos d \pm \cos c \sin b \sin d$, worin wieder das doppelte Zeichen sich auf die zweifach mögliche Lage des Zeniths bezieht. Substituirt man hierin die obigen Werthe, so ist zunächst:

$$\sin \varphi = \sec a^2 \sin \delta \sin \tfrac{1}{2}(h + h') \cos \tfrac{1}{2}(h - h') \pm \cos c \sin b \sin d.$$

Die Bildung des Productes cos c sin b aus den obigen Werthen von sin c und cos d nebst der weiteren Reduction, wo-

bei auch der Werth des Perpendikels p, gefällt auf eine Seite a von dem gegenüberliegenden Winkel, aus den 3 Seiten a, b, c und deren halbe Summe s benutzt werden kann, nämlich $\sin p^2 \sin a^2 = \sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)$, giebt dann als dritte Methode der Breitenbestimmung aus 2 Höhen nebst der verflossenen Zeit in folgenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} (t' - t) = \sin a; \quad 2)\ \sin \delta \sec a = \cos b \\ 3)\ \operatorname{cosec} a \sin \tfrac{1}{2} (h - h') = \sin C; \quad 4)\ \sec a \sin \tfrac{1}{2} (h + h') = \sin D \\ 5)\ \sin \varphi = \cos b \sin D \cos \tfrac{1}{2} (h - h') \pm \sin b \cos C \cos D. \end{array}\right\} \text{III}$$

Beispiel 1. Die Zeiten der Uhr seien $10^h\ 17^m$ und $11^h\ 17^m$, die zugehörigen wahren Höhen $17^0\ 13'$ und $19^0\ 41'$, die Declination $20^0\ 0'$ S. Hieraus folgt nach der zuletzt angeführten Methode $\sin \varphi = -10980 \pm 87590$, $\varphi = 50^0\ 0'$ N oder $80^0\ 18'$ S. Krafft (a. a. O.) findet bei schärferer Rechnung mit 7 Decimalstellen: $\varphi = 50^0\ 0'\ 4''$ N oder $80^0\ 19'\ 53''$ S.

Beispiel 2. Von Dr. Brinkley wurde im Naut. Alm. f. 1822 die folgende Aufgabe in etwas anderer Form berechnet: die halbverflossene Zeit $= 1^h\ 10^m\ 0^s = 17^0\ 30'$, die wahren Höhen $70^0\ 1'$ und $35^0\ 21'$, die Declination $5^0\ 30'$ N, woraus sich ergiebt: $\sin \varphi = 0{,}07993 \pm 0{,}05269$ und $\varphi = 7^0\ 37'$ N oder $1^0\ 34'$ N.

Wegen der Ortsveränderung des Schiffes in der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen ist es, nach Beseitigung anderer Reductionsformen jetzt allgemein gebräuchlich geworden, an die erste Höhe diejenige Correction für die Zenithveränderung anzubringen, wodurch diese erste Höhe so verändert wird, wie sie am zweiten Beobachtungsorte erschienen sein würde, wenn das Schiff zuerst schon daselbst gestanden hätte. Eine solche Correction für die Fahrt ergiebt sich sehr einfach als Kathete eines geradlinigen Dreiecks, wozu als Hypotenuse die ganze in der Zwischenzeit gesegelte Distanz und als eingeschlossener Winkel der Unterschied der Richtungen zwischen dem Azimuth des Gestirns bei der ersten Höhe und dem in der Zwischenzeit gesegelten Curse gehört. Da die gesegelte Distanz

in üblicher Weise nach solchen Meilen oder Viertelmeilen (Knoten), wovon 60 auf einen Grad gehen, also nach Minuten gemessen wird, so erhält man die Correction der Höhe gleichfalls in Minuten. Die Fahrtcorrection ist demnach positiv, nämlich zur ersten Höhe zu addiren, wenn der Winkel zwischen der Peilung des Gestirns und dem Curse kleiner als 90 Grad ist, sonst negativ; und die Correction ist als verschwindend anzusehen für den Fall, dass dieser Winkelunterschied 90 Grade beträgt. Eine selten nöthige strengere Berücksichtigung dieser Veränderung ergiebt sich, auch ohne das eigentlich sphärische Dreieck statt des geradlinigen zu betrachten, für den Fall von kleinen Zenithdistanzen und grosser Veränderung des Schiffsortes, bei dem letzten Falle z. B. wo der Winkel 90 Grade war, durch die leichte tabellarische Aufsuchung der Hypotenuse zu der Zenithdistanz als der einen Kathete und der gesegelten Distanz als der andern Kathete. Die Differenz zwischen jener Hypotenuse und der ersten Kathete würde dann die von Null etwas verschiedene negative Correction der ersten Höhe geben, um diese auf den zweiten Ort zu reduciren.

Die Veränderung der Declination in der Zwischenzeit der Beobachtungen wird im Allgemeinen hinreichend dadurch berücksichtigt, dass man die für das Mittel der Beobachtungszeiten gültige Declination anwendet. Bei der Douwesschen Auflösung am Schlusse der Rechnung ist die Declination zu benutzen, welche zur grössten Höhe gehört, weil man diese Höhe auf den Meridian reducirt hat.

Wenn statt der Sonne ein Fixstern beobachtet wurde, so wird die verflossene Zeit, falls die Uhr nicht nach Sternzeit regulirt ist, noch auf letztere reducirt.

Beispiel. Am 20. Juni 1799 beobachtete A. v. Humboldt zu Montserrat in Spanien:

Uhrzeiten.	Doppelte Höhen des Sirius.	Declination des Sterns.
$9^h\ 51^m\ 46^s$	$62^0\ 35'\ 19''$	$-\ 16^0\ 26'\ 58''$
10. 30. 17.	63. 57. 14.	

Da die Uhr nach mittlerer Zeit regulirt war, so ist die Zwischenzeit $0^h\,38^m\,21^s$ um $6\frac{1}{2}$ Secunden zu vergrössern, um die wirkliche Veränderung des Stundenwinkels anzugeben. Die Refractionen für die Höhen betrugen 1′ 35″ und 1′ 33″. Obgleich die Höhen etwas ungünstig nahe beisammen liegen, so ergiebt sich doch die Breite von Montserrat = 41° 35′ 43″, welches mit der Bestimmung von Méchain (41° 36′ 16″ im Littrow'schen Verzeichniss, Leipzig 1844) nahe übereinstimmt.

Dritter Fall.

Gegeben: Der Unterschied zweier Höhen und die wahren Stundenwinkel, nebst der Declination und der genäherten Breite.

Gesucht: die Breite.

Auflösung:
$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$
$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t'$$

Die Subtraction dieser Gleichungen giebt:
$$\cos \tfrac{1}{2}(h + h') = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin \frac{1}{2}(t' - t) \sin \frac{1}{2}(t' + t)}{\sin \frac{1}{2}(h - h')}$$

Bei der Anwendung dieser Aufgabe müsste $\cos \varphi$ erheblich grösser als $\cos \frac{1}{2}(h + h')$ sein, auch die Höhendifferenz sehr genau beobachtet werden, um einen verbesserten Werth der Breite zu erlangen.

Vierter Fall.

Es seien drei Höhen eines Gestirns nebst den Zeitintervallen beobachtet worden, so ergeben sich für die Breiten- und Zeitbestimmung drei Gleichungen von der Form:
$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$
und ausserdem zwei unabhängige Gleichungen für die bekannten Unterschiede der Stundenwinkel. Es liesse sich daher, ausser φ und t gleichfalls noch δ bestimmen, wenn diese Grösse nicht auf anderem Wege genauer bestimmbar wäre als in diesem Falle, wo kleine Fehler in den Höhenmessungen einen grossen Einfluss auf das Resultat üben können. *) Die beobachteten Zeitintervalle seien λ und λ', so werden die drei Gleichungen:

*) Ueber diese Aufgabe hat man Auflösungen in den Comment. Acad.

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$
$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t + \lambda)$$
$$\sin h'' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t + \lambda')$$

Wenn man also $\cos \varphi \cos \delta \cos t = x$, $\cos \varphi \cos \delta \sin t = y$, und $\sin \varphi \sin \delta = z$ setzt, so kann hieraus durch Division φ, t und δ bestimmt werden, nachdem x, y und z bekannt sind. Denn es ist zunächst $\operatorname{tg} t = \frac{y}{z}$, $\cos \varphi \cos \delta = \frac{x}{\cos t}$, $\sin \varphi \sin \delta = z$, folglich $\cos (\varphi - \delta) = \frac{x}{\cos t} + z$ und $\cos (\varphi + \delta) = \frac{x}{\cos t} - z$, wodurch schon φ und δ bekannt werden. Die Grössen x, y und z kann man durch einfache Elimination aus den Gleichungen erhalten:

$$\sin h = z + x$$
$$\sin h' = z + x \cos \lambda - y \sin \lambda$$
$$\sin h'' = z + x \cos \lambda' - y \sin \lambda'.$$

Petrop. A. 1729—1735; ferner von Bohnenberger in der geogr. Ortsbest. p. 288; Schmidt Mathem. Geogr. p. 487; Brünow Sphär. Astron. p. 275. — Ueber den Fall, wo die drei Höhen zu verschiedenen Gestirnen gehören, besonders von Gauss in v. Zach's Monatl. Corresp. 1808, Bd. 18; auch Brünow, Sphär. Astr. p. 276 bis p. 291.

VII. Kapitel.

Zeitbestimmungen.

§ 27. Zeitbestimmung aus der Höhe der Sonne oder eines Sterns.

Bei der Zeitbestimmung aus einer beobachteten Höhe h wird vorausgesetzt, dass die Breite φ des Beobachtungsortes und die Declination δ des beobachteten Gestirns bekannt sind. Dann ergiebt sich der Stundenwinkel t aus der Formel:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

oder da der cos für kleine Werthe des Stundenwinkels ungenaue Resultate giebt, mittelst der Formeln $1 - \cos t = 2 \sin \frac{1}{2} t^2$ und $\cos \alpha - \cos \beta = - 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ ferner:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\cos (\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cos \delta},$$

als die bei Anwendung von natürlichen Sinus gewöhnlichste Formel.

Die ganz logarithmische Rechnung wird, wenn man $90 - h = z$ setzt:

$$\sin \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (z + \varphi - \delta) \sin \frac{1}{2} (z + \delta - \varphi)}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Eine Tafel für $\log \sin \frac{1}{2} t^2$ oder den Logarithmus des halben Sinusversus, von $t = 0$ bis $t = 12^h = 180^0$ in ver-



schiedenen neueren nautischen Tafeln*) dient zur Erleichterung dieser Rechnung.

Eine etwas andere Form ergiebt sich, wenn man $90 - \delta = p$ einführt, nämlich:

$$\sin \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (\varphi + p + h) \sin \tfrac{1}{2} (\varphi + p - h)}{\cos \varphi \sin p}$$

welches eine sehr gebräuchlich gewordene Form ist.

Im Allgemeinen wird man zwar, wenigstens auf höheren Breiten, die kleinen Werthe von t, also die Nähe des Meridians zu vermeiden haben, denn die Differenzirung der Grundgleichung in Bezug auf t und h giebt $-\sin t\, dt = \frac{\cos h\, dh}{\cos \varphi \cos \delta}$ oder

$$dt = - dh \frac{\cos h}{\cos \varphi \cos \delta \sin t}$$

wonach ein kleiner Werth für sin t das Ergebniss für dt sehr beträchtlich vergrössern würde, falls nicht cos h ebenfalls sehr klein, mithin h sehr gross werden sollte. Uebrigens ist **) $\frac{\cos \delta \sin t}{\cos h} = \sin A$, wo A den Azimuthwinkel des Dreiecks bezeichnet, folglich auch

$$dt = - \frac{dh}{\cos \varphi \sin A}$$

welches ein Maximum für $A = 90^0$ wird, so dass im ersten Vertical unter allen Umständen sich die günstigste Gelegenheit zur

---

*) 23 Seiten umfassend in den nautischen Hülfstafeln von W. v. Freeden und T. Köster, Oldenburg 1862; 64 Seiten in den naut. Hülfstafeln von Dr. A. Breusing, Bremen 1864, 2te Auflage. In derselben Ausdehnung (64 Seiten) ist die Tafel (Log sine square) schon von H. Raper gegeben in dessen Practise of Navigation and Nautical Astronomy, London 1842. 2. Edit.

**) Führt man den s. g. parallaktischen Winkel w ein, mittelst der Gleichung

$$\sin w = \frac{\cos \varphi \sin t}{\cos h},$$

$$\text{so wird } dt = - \frac{dh}{\cos \delta \sin w}.$$

Zeitbestimmung durch Höhenmessungen darbietet. Eine Tabelle, woraus dt mit φ und A für d h = 1 Minute entnommen werden kann ist u. a. in Breusing's Naut. Hülfstaf., Bremen 1864, Tafel 23, gegeben. In derselben Tafel ist auch für d φ = 1 Minute, der Werth von dt mittelst φ und A berechnet, wozu sonst die Differentialformel dienen kann:

$$dt = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi \operatorname{tg} A}$$

Nebenbei ergiebt sich noch, dass wegen cos φ im Nenner, die Zeitbestimmung im Allgemeinen auf niedrigen Breiten sicherer als auf höheren Breiten erlangt werden kann.

Beispiel 1. Vormittags den 28. Juli 1851 beobachtete ich in Kiel auf $54^0\ 19'$ N Breite mit einem Spiegelsextanten von Oertling die doppelte Höhe des untern Sonnenrandes = $65^0\ 37'\ 30''$ als eine Pendeluhr von Nieberg $8^h\ 7^m\ 3^s$ zeigte. Indexfehler = 0, Refraction = $1'\ 28''$, Halbmesser der Sonne = $15'\ 46''$ und ihre Declination = $19^0\ 7'\ 56''$ N. Hiermit ergab sich t = $3^h\ 58^m\ 16^s,3$ oder die wahre Zeit in Kiel = $8^h\ 1^m\ 43^s,7$. Die Zeitgleichung $6^m\ 11^s,2$ addirt gab die mittlere Ortszeit = $8^h\ 7^m\ 54^s,9$ und die Uhr war demnach $51^s,9$ zurück gegen mittlerer Kieler Zeit.

Wenn statt der Sonne ein Stern für die Zeitbestimmung beobachtet wird, so ist zunächst der Stundenwinkel t des Sterns nach derselben Formel zu berechnen. Die mittlere Zeit der Beobachtung wird dann aus der Formel:

$$\text{Mittl. Zeit} = t + \alpha - S$$

gefunden, wo α die Rectascension des Sterns und S die Rectascension der (mittleren) Sonne bezeichnet. t wird negativ, wenn der Stundenwinkel östlich ist; oder wenn man es vorzieht, kann im letzteren Falle 24 — t statt t gesetzt werden.

Beispiel 2. Am Abend des 31. Octbr. 1850 ist in Kiel mit einem Sextanten von Filby die doppelte Höhe des Sterns Wega (α Lyrae) = $31^0\ 38'\ 0''$ von mir beobachtet worden, als die Uhr $11^h\ 57^m\ 7^s$ zeigte. Der Stern war westlich vom Meridiane. Indexfehler = 0, Refraction = $3'\ 1''$, Declination des Sterns = $38^0\ 38'\ 45''$ N. Hieraus fand sich t = $8^h\ 4^m\ 32^s$ und da α =

$18^h\,31^m\,53^s$, $S = 14^h\,39^m\,33^s$ betrug, so wurde die mittlere Ortszeit $= 11^h\,56^m\,52^s$, mithin der Uhrfehler $= 15^s$, um welche die Uhr voraus war gegen die mittlere Ortszeit.

Beispiel 3. Am 14. Juli 1837*) wurde zu Alexandria, einem Dorfe am Kaukasus auf $44^0\,13'\,40''$ N Breite und $2^h\,53^m\,25^s$ östlicher Länge von Greenwich, die Zenithdistanz des Sterns Arcturus am Höhenkreise eines Theodolithen $= 58^0\,41'\,33''$ gemessen, als ein Chronometer $10^h\,40^m\,35^s,7$ zeigte. Der Stern war westlich vom Meridiane und in der Nähe des ersten Verticals. Die Refraction $= 1'\,30''$, Declination des Sterns $= 20^0\,2'\,0''$ N, dessen Rectascension $\alpha = 14^h\,8^m\,15^s,2$, ferner die mittlere Sonnenrectascension $S = 10^h\,59^m\,55^s,2$. Für das Chronometer folgt demnach, dass es $19^m\,20^s,5$ zurück war gegen die mittlere Ortszeit. — Hieran schloss sich eine sehr zweckmässig gewählte Beobachtung des Sterns α Aquilae, östlich vom Meridiane und ebenfalls in der Nähe des ersten Verticals, wonach der Fehler des Chronometers $19^m\,21^s,0$ wurde, oder im Mittel ans beiden Beobachtungen $19^m\,20^s,7$, welches um so sicherer als Resultat der Zeitbestimmung sich ergab. Denn selbst bei einer fehlerhaften Höhe zu beiden Seiten des Meridians würde dasselbe Resultat sich ergeben haben, wenn der Fehler auf beiden Seiten gleich gross in Beziehung auf den Stundenwinkel geworden wäre, wie sich bei den nahe gleichen Höhen annehmen lässt, insofern der Fehler im Instrumente liegt. Die Bestimmung der Lage des Meridians, als Mittel aus beiden Ergebnissen, wird demnach frei von solchen constanten Fehlern. Hierauf gründet sich auch die folgende Methode.

§ 28. Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen.

Ist von einem und demselben Fixsterne eine Höhe von gleicher Grösse (correspondirende Höhe) zu beiden Seiten des Meridians beobachtet worden, so hat man als Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten die Zeit des Meridiandurchganges für diesen

*) Abriss der praktischen Astronomie von Prof. Sawitsch. Deutsch von Dr. Götze. Hamburg 1850. Bd. I p. 282.

Stern, wobei demnach die Kenntniss einer solchen Höhe selbst unnöthig ist, sondern nur die Versicherung genügt, dass es beidemal eine Höhe von genau gleicher Grösse war. Bei der Beobachtung von Sonnenhöhen würde es sich ebenso verhalten, wenn die Declination sich nicht änderte in der Zwischenzeit. Die Aenderung des Zeitwinkels in Folge der Aenderung der Declination bei correspondirenden Höhen ist aus der Differenzirung der Grundgleichung zu entnehmen. Wollte man diese Rechnung umgehen, so könnte es dadurch geschehen, dass aus jeder Höhe mit der zugehörigen Declination der Stundenwinkel berechnet würde. Dies wird aber um so weitläuftiger, je grösser die Anzahl der zu berechnenden correspondirenden Beobachtungen ist, deren einzelne Resultate man zur Vergleichung der Uebereinstimmung kennen lernen will.

Aus der Grundgleichung

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

ergiebt die Differenzirung nach δ und t zunächst:

$$0 = \sin \varphi \cos \delta . d\delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t \, d\delta - \cos \varphi \cos \delta \sin t . dt$$

oder wenn mit $\cos \varphi \cos \delta$ dividirt und der Werth von dt herausgesetzt wird:

$$dt = d\delta \left(\frac{tg \varphi}{\sin t} - \frac{tg \delta}{tg t} \right) \ldots (1)$$

Um diesen Betrag vergrössert sich demnach der Stundenwinkel, wenn δ sich um $d\delta$ vergrössert, also wenn die Sonne sich dem nördlichen Pole nähert (sich in den aufsteigenden Zeichen befindet). Wenn daher T_1 und T_2 die Uhrzeiten der Beobachtungen, und T_0 die Uhrzeit des wahren Mittags bezeichnet, so wird:

$T_0 - t = T_1$ im Falle t der mit der ersten Declination berechnete Stundenwinkel ist; ferner auch

$T_0 + t + dt = T_2$ wenn dt die wegen der Aenderung der Declination von der ersten bis zur zweiten Beobachtungszeit erforderliche Correction des Stundenwinkels bedeutet, also $\frac{1}{2}$ dt die entsprechende Correction in der halben verflossenen Zeit.

Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt:

$$2\,T_0 + dt = T_1 + T_2, \text{ daher}$$
$$T_0 = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2) - \tfrac{1}{2}\,dt \ldots . (2)$$

oder wenn man die Ausdrücke (1) und (2) zusammenfasst:

$$T_0 = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2) - \tfrac{1}{2}\,d\delta.\left(\frac{tg\,\varphi}{\sin\,t} - \frac{tg\,\delta}{tg\,t}\right) \ldots (3)$$

Der erste Theil $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ oder der s. g. „unverbesserte Mittag“ ist die Zeit nach der Uhr, wo die Sonne sich in dem Stundenkreise befindet, welcher die Summe der beiden Stundenwinkel halbirt. Der zweite Theil oder die „Mittagsverbesserung“ ist der halbe Unterschied der beiden Stundenwinkel, ausgedrückt in wahrer Sonnenzeit, wenn man mit 15 dividirt. So lange demnach die Grösse $\frac{tg\,\varphi}{\sin\,t} - \frac{tg\,\delta}{tg\,t}$ positiv ist, hat man von der halben Summe der Uhrzeiten etwas abzuziehen, um die Uhrzeit des wahren Mittags zu erhalten. Die Werthe von sin t und tg t sollten zwar der Strenge nach in wahrer Zeit ausgedrückt sein, doch genügt hierbei die Anwendung derselben Winkel als halbe Differenz der Uhrzeiten in mittlerer Zeit, da die tägliche Aenderung der mittleren Rectascension von der täglichen Aenderung der wahren Rectascension sehr wenig verschieden ist. Sollte dagegen die Uhr mit einem beträchtlichen Gange behaftet oder etwa nach Sternzeit regulirt sein, so müsste der Winkel t wenigstens auf mittlere Zeit zurückgeführt werden, um sin t und tg t nicht ungenau aus den Tafeln zu entnehmen. Hierauf kann man diese Berücksichtigung beschränken, da in Beziehung auf $d\delta$ eine erforderliche Verminderung z. B. wegen des etwa zu gross angenommenen, weil in Sternzeit ausgedrückten Zeitintervalls womit die Declinationsänderung gefunden wurde, durch eine schliessliche Correction zur Reduction der wahren Zeit auf Sternzeit wieder aufgehoben würde. Es genügt daher, die Verbesserung für den Gang der Uhr lediglich auf die Werthe von sin t und tg t zu beschränken, welche in wahrer Zeit, wenigstens mit hinreichender Annäherung, auszudrücken sind.

B e i s p i e l. In Paris auf 48° 50′ N Breite beobachtete Francoeur am 13. Nov. 1821 zwei gleiche Höhen der Sonne nach den Zeiten der Uhr; $T_1 = 8^h\,44^m\,6^s,0$ und $T_2 = 15^h\,17^m\,54^s$.

Die Höhe selbst ist nicht angegeben und auch für diese Zeitbestimmung nicht erforderlich. Man hatte die Declination der Sonne $\delta = -17^{\circ}\ 58'$ und ihre tägliche Aenderung $= -15'\ 50''$, also $d\delta = -\frac{259'',8}{15} = 17^{s},32$ in $6^{h}\ 34^{m}$. Daraus ergiebt sich $\frac{1}{2}(T_1 + T_2) = 12^{h}\ 1^{m}\ 0^{s}$ und die Mittagsverbesserung $= (+1,510 + 0,279)\ \frac{1}{2}\ d\delta = 15^{s},49$. Demnach die Uhrzeit im wahren Mittage $= 12^{h}\ 1^{m}\ 15^{s},49$ und der Uhrfehler $= 1^{m}\ 15^{s},49$ zu früh gegen wahre Pariser Zeit.

Für Gruppen von correspondirenden Beobachtungen dienen Hülfstafeln zur Erleichterung der Rechnung. Man gebraucht vorzüglich die Tafeln von Gauss, nach der erweiterten Berechnung von Gerling, *) welche von $t = 0$ bis $t = 6^{h}$ von Minute zu Minute fortschreitend, die beiden Theile der Formel

$$\frac{1}{2}\, d\delta \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}\right)$$

zu berechnen dienen. Diese Tafeln geben nämlich $\log A = \log \frac{t}{720 \sin t}$ und $\log B = \frac{t}{710 \operatorname{tg} t}$, wo $720 = 48.15$ ist, indem der Werth von $d\delta$ in Zeit $= \frac{t\,\mu}{48.15}$ gefunden wird und μ die 48stündige Aenderung der Declination bezeichnet. Die Mittagsverbesserung lässt sich damit also auch so ausdrücken:

$$- A\,\mu \operatorname{tg}\varphi + B\,\mu \operatorname{tg}\delta$$

und es wird $T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - A\,\mu \operatorname{tg}\varphi + B\,\mu \operatorname{tg}\delta$.

In den Tafeln von Domke, Taf. 41 p. 231, ist das Argument t, von $t = 0$ bis zu $t = 12^{h} =$ der halben Zwischenzeit gegeben. Z. B. für $t = 3^{h}\ 0$ wird $\log A = 7,7703$ und $\log B = 7,6198$. — Bei einem beträchtlichen Gange der Uhr sind aber nach dem Vorhergehenden die Werthe von A und B mit einem verbesserten, nämlich hinreichend nahe der wahren Sonnenzeit entsprechenden Werthe von t aus den Tafeln zu entnehmen.

---

*) Gauss in v. Zach's Monatl. Corr. Bd. 23. Gotha 1811, p. 404 bis 409.

§ 29. Einige andere Arten der Zeitbestimmung.

Im Allgemeinen lässt sich der Stundenwinkel t bestimmen, wenn in dem Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Gestirnsort 3 andere Theile gegeben sind, wovon man diese letzteren theils aus den astronomischen Ephemeriden, theils aus den Beobachtungen, entweder direct oder indirect entnommen hat.

Ist die Breite bekannt, so genügt zwar eine einzelne Höhe, indessen wird man es, der Sicherheit und Genauigkeit wegen, immer vorziehen, mehrere Höhen nach einander zu beobachten, und daraus das Mittel zu nehmen. Freilich ändert sich die Höhe nicht strenge der Zeit proportional, und das arithmetische Mittel erfordert demnach eine kleine Correction, oder man kann auch den mit dem Mittel der Höhen berechneten Stundenwinkel durch eine entsprechende Correction berichtigen;*) aber da der nicht bestimmbare, eigenthümliche Fehler des Instruments doch noch in diesen Beobachtungen haften bleibt, und nur durch correspondirende Höhen (§ 28) oder solche, welche den correspondirenden nahe kommen, zu beseitigen ist, so wird gewöhnlich jene andere kleine Correction weggelassen.

Ferner giebt die Auflösung des Douwes'schen Problems

---

*) Sind t, t' t'' . . . die Uhrzeiten nnd zugleich die ungefähren wahren Stundenwinkel für die Höhen h, h' h'' . . . und ist n die Anzahl der Beobachtungen, so wird die zu der Zeit

$$T = \frac{t + t' + t'' \ldots}{n}$$

gehörige Höhe H sehr nahe:

$$H = \frac{h + h' + h'' \ldots}{n}$$

$$+ \left\{ (T-t)^2 + (T-t')^2 + \ldots \right\} \frac{a - b^2 \operatorname{tg} H}{2\,n}$$

$$\text{wo } a = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos H} \cos T$$

$$b = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos H} \sin T$$

bezeichnen, und wenn T—t, T—t' . . . in Zeitsecunden ausgedrückt werden, so ist noch mit $15^2 \sin 1''$ zu multipliciren, um die Correction in Bogensecunden zu erhalten. (Vergl. C. Littrow Astr. Nachr. Bd. 34 p. 33, Altona 1852).

auch ein Mittel zur Zeitbestimmung in dem Resultate für $\frac{1}{2}(t'+t)$ da nach der Uhr $\frac{1}{2}(t'-t)$ bekannt ist, mithin die einzelnen Werthe von t und t' oder die wahren Zeiten der Beobachtung, durch Subtraction und Addition gefunden werden können. Doch ist hierbei zu berücksichtigen, wenn man die Auflösung von Douwes benutzt hat, dass der Fehler der geschätzten Breite in der Rechnung vorkommt und daher auch den so bestimmten Stundenwinkel beeinflusst.

Ein anderes indirectes Verfahren (von J. Littrow), um eine genauere Zeit- und zugleich Breitenbestimmung aus dem Douwes'schen Problem zu erhalten, besteht darin, dass man mit der angenommenen Breite und der für jede Beobachtung geltenden Declination und Höhe, die beiden Stundenwinkel auf gewöhnliche Art (aus den 3 Seiten) berechnet. Die hieraus sich ergebende verflossene Zeit, als Summe oder Differenz der berechneten Stundenwinkel, mit der nach der Uhr beobachteten verflossenen Zeit verglichen, entscheidet über die Richtigkeit der angenommenen Breite, welche man variiren kann bis die Uebereinstimmung erfolgt,*) wo dann die Stundenwinkel die wahren Zeiten der Beobachtung für die Zeitbestimmung liefern.

Am Lande dienten schon von Alters her zur genäherten Zeitbestimmung die Sonnenuhren. Ihre Einrichtung besteht im Allgemeinen darin, dass ein Zeiger (Gnomon), welcher den Schatten giebt, parallel zur Erdaxe gestellt wird. Ist dann die Projectionsfläche, worauf die Stundenlinien gezogen sind, parallel mit der Ebene des Aequators, so hat man die Aequatorial-Sonnenuhr, auf welcher alle Stundenwinkel von gleicher Grösse = 15 Graden sein müssen. — Eine genau entgegengesetzte Lage

---

*) Verbindet man damit zugleich eine beiläufige Berechnung des Azimuths A, so ist aus der Formel

$$dt = \frac{\text{cotg } A}{\cos \varphi} \, d\varphi \quad (\S\ 26)$$

leichter zu entnehmen, um wie viel die Breite φ noch geändert werden muss zur Darstellung der verflossenen Zeit, gemäss den Beobachtungen.

hat die Polaruhr, wo die einzutheilende Ebene mit dem Sechsuhrkreise zusammenfällt, also auch parallel zur Erdaxe sein muss, und der Zeiger daher senkrecht zur Erdaxe im Meridian gerichtet wird. In diesem Falle zeigt nun der Endpunkt des Schattens die betreffenden Stundenlinien, welche einander parallel sind, und deren Abstände wachsen, wie die Tangenten der Stundenwinkel, so dass z. B. für 9 Uhr Vormittags oder 3 Uhr Nachmittags der Abstand gleich der Länge des Zeigers zu nehmen ist. Die Stundenlinien stehen also senkrecht auf einer von Osten nach Westen gezogenen Linie. — Bei der Horizontal-Sonnenuhr ist die Projectionsebene mit den Horizonte parallel, der Zeiger wieder parallel zur Erdaxe und die Stundenlinien zerlegen die projicirten Stundenwinkel in ungleiche Theile, so dass, wenn x den projicirten Winkel bezeichnet, welcher zum Stundenwinkel t gehört, $\mathrm{tg}\, x = \sin \varphi\, \mathrm{tg}\, t$ für die Polhöhe φ wird. Die Vertical-Uhr soll eine verticale Projectionsfläche haben, und wenn dieselbe zugleich senkrecht zur Mittagslinie gedacht wird, so ergiebt sich für die Bestimmung des projicirten Stundenwinkels x die Formel $\mathrm{tg}\, x = \cos \varphi\, \mathrm{tg}\, t$. — Man hat auch auf beliebig geneigten geraden oder krummen Flächen Sonnenuhren entworfen, doch wird es hierbei am kürzesten, empirisch zu verfahren, indem man, nachdem der Zeiger parallel zur Erdaxe gestellt ist, vermittelst einer nach wahrer Zeit regulirten Uhr, die Stundenlinien direct durch den Schatten aufträgt.

Da die Sonnenuhren zunächst nur die wahre Zeit angeben, so hat man, um auch die Angabe der mittleren Zeit hinzuzufügen, den Ort des Endpunktes des Schattens im mittleren Mittage zu bemerken, und diese Endpunkte bei ihrer wechselnden Stellung im Laufe des Jahres mit einander verbunden, liefern eine Correctionscurve für die mittlere Zeit. Diese Curve nimmt bei den horizontalen Sonnenuhren die Gestalt einer Schleife mit zwei ungleichen Oeffnungen an.

VIII. Kapitel.

Längenbestimmungen.

§ 30. Längenbestimmungen im Allgemeinen.

Die Bestimmungen der geographischen Länge eines Ortes beruhen im Allgemeinen auf der Beobachtung des Zeitunterschiedes zwischen diesem Orte und einem andern, dessen Länge als bekannt angenommen wird.

Da der Anfang der Längenzählung, der s. g. erste Meridian, nicht wie bei der Breitenmessung durch die Natur gegeben, sondern willkührlich ist, so ist noch über die Annahme des ersten Meridians eine Verschiedenheit zurückgeblieben. Im Alterthum, bei Marinus von Tyrus, Ptolemäus und den Arabern wurde der erste Meridian gewöhnlich durch die westlichsten der damals bekannten Oerter, nämlich durch die Canarischen Inseln (Insulae fortunatae) gelegt, jedoch ohne den eigentlichen Nullpunkt näher zu bezeichnen, uud später ist von den holländischen Geographen sowohl Palma, Ferro als auch Teneriffa zum Ausgangspunkte der Längenzählung angewandt worden. Ferner wurde nach der Entdeckung der Azoren auch von diesen Inseln aus die Länge gezählt, wozu noch kam, dass die Abweichung oder Missweisung der Magnetnadel für diese Gegend damals Null war. Die Zählung der Länge nach dem Pico von Teneriffa ist besonders auf den holländischen Seekarten lange gebräuchlich geblieben. Auf den Vorschlag des Geographen Delisle hat man die s. g. Länge von Ferro genau = $20^0\ 0'\ 0''$ westlich von der

Pariser Sternwarte festgesetzt (obgleich Ferro selbst etwas westlicher liegt). Dasselbe ist auch von der Berliner Akademie angenommen worden und auf den deutschen Landkarten allgemein gebräuchlich geblieben. Die Seekarten haben jetzt gewöhnlich den von Flamsteed gewählten Meridian der Sternwarte zu Greenwich als ersten Meridian, während noch im vorigen Jahrhundert (1754) auf englischen Seekarten die Länge von Greenwich = 0° 5′ östlich und die Länge von London = 0 gesetzt wurde. Man zählt die Länge von Greenwich nur bis 180 Graden nach Westen oder Osten und die Länge von Ferro bis 360 Graden immer östlich.

Die ältesten astronomischen Längenbestimmungen sind durch die Beobachtung von Mondfinsternissen erlangt worden. Hatte man an zwei Orten den Anfang oder das Ende einer Mondfinsterniss beobachtet, so war vermöge dieser gleichzeitig stattfindenden Erscheinung, woran die Parallaxe nichts ändern konnte, die Differenz der beiden Ortszeiten der gesuchte Längenunterschied. Nach der Erfindung der Fernröhre (1608) kam als neue, für die geographische Längenbestimmung wichtig gewordene Methode, die Beobachtung der weit häufiger stattfindenden Verfinsterungen der Jupiterssatelliten hinzu. Gegen das Ende des 17ten Jahrhunderts wurde auch die Methode der viel genauer zu beobachtenden Sonnenfinsternisse und der Sternbedeckungen vom Monde für die Längenbestimmung eingeführt. Hierbei ist die Parallaxe zu berücksichtigen, da es sich nicht mehr um den Eintritt des verfinsterten Gestirns in den Schatten eines andern, sondern nur um eine durch den Beobachtungsort bedingte Stellung handelt, welche mit den beiden Gestirnen in gerader Linie liegen muss, um diese Art von Verfinsterung oder Bedeckung hervorzubringen. Eine andere Art der Längenbestimmung durch den Mond besteht in der Beobachtung der Rectascensionsunterschiede zwischen dem Monde und benachbarten Sternen, welche nahe dieselbe Declination haben (Sterne im Parallel des Mondes). *) Die Beobachtung der Rectascension

*) Diese Methode wurde von Nicolai, Baily und Struve eingeführt. Astr.

des Mondes im Meridiane wurde schon im Jahre 1544 v. Orontius Finäus als Mittel zur Längenbestimmung angegeben (Vergl. Struve Astr. Nachr. Bd. 19 p. 329). Endlich hat die telegraphische Verbindung der Oerter zu den genauesten Längenbestimmungen geführt. Durch Pulversignale hatte man zunächst bei hinreichend nahe gelegenen Oertern dies Verfahren angewandt, welches eine beliebige Wiederholung gestattet und dadurch die Genauigkeit vermehrte. Die Beschränkung durch die Entfernung ist ganz weggefallen bei der Anwendung von elektromagnetischen Telegraphen, welches Mittel jetzt die genaueste Längenbestimmung gewährt.

In der nautischen Astronomie ist die Erreichung einer guten Bestimmung der Länge auf dem Meere (Longitudo maris) ein Hauptproblem gewesen, auf dessen zweckmässige Lösung hohe Preise gesetzt wurden. Die Bestimmung der Breite unterlag keinen Schwierigkeiten, so dass man sich zunächst lange damit behelfen musste, auf die Breite des zu erreichenden Ortes zu gelangen, und dann ost- oder westwärts segelnd, weiter zum Ziele. In Ermangelung anderer Hülfsmittel für die Längenbestimmung wurde noch im 18ten Jahrhundert von Halley (früher schon von Stevin) die Abweichung der Magnetnadel vom Meridian dazu vorgeschlagen, nachdem eine Karte der magnetischen Linien einigermassen vollständig vorhanden war. Bouguer stellte später diese isogonischen Linien für die Jahre 1700 und 1744 zusammen, um auch die Veränderung derselben im Laufe der Zeit berücksichtigen zu können. In England hatten Mountaine und Dodsen vorzüglich die Herstellung der Isogonen für das Jahr 1744 veranstaltet. Unter den Methoden zur Längenbestimmung in der nautischen Astronomie wurde in den Schriften des vorigen Jahrhunderts von Bouguer, Robertson, Bezout u. a. diese physikalische Methode allemal als die zunächst verwendbare vorangestellt. — Um zuverlässigere Methoden zu erzielen, setzte eine englische Parlamentsacte vom Jahre 1714 auf die nautische

---

Nachr. Bd. 1 1823, Bd. 2 1824, Bd. 3 1825. — Struve Anwendung des Durchgangsinstr. Petersburg 1833.

Bestimmung der Länge innerhalb eines Grades einen Preis von 10000 Pfund Sterling, und für die Bestimmungsmethode innerhalb eines halben Grades den doppelten Preis. Für die Prüfung der mannigfaltig in Vorschlag gebrachten Methoden und überhaupt für die fernere Bearbeitung des Gegenstandes entstand in England das Board of Longitude, in Frankreich das noch jetzt sogenannte Bureau des longitudes. Einen Theil des englischen Preises erhielt der englische Uhrmacher Harrison, als Erfinder der Chronometer, wovon er das erste im Jahre 1729 vollendete; und ein anderer Theil des Preises wurde dem deutschen Astronomen Tob. Mayer für die von ihm berechneten Mondtafeln (1755), wie auch Leonh. Euler für die Vervollkommnung der Theorie der Mondbewegung bewilligt.

Die ältesten Versuche, den Ort des Mondes für die nautische Längenbestimmung zu benutzen, finden sich schon im 15. Jahrhundert. Es waren zunächst nur Beobachtungen in der Nähe der Conjunction des Mondes mit hellen Sternen. *) Am 23. August 1499 beobachtete Vespucci an der Küste von Venezuela den 1 Grad betragenden Abstand des Mondes vom Planeten Mars; am 16. Decbr. 1519 wurde von Andr. de San Martin, dem astronomischen Begleiter Magellan's, vor Rio de Janeiro die Beobachtung einer Conjunction Jupiter's mit dem Monde angestellt, und am 24. Januar 1597 beobachtete Barent auf Nova Semlja ebenfalls eine Conjunction von Jupiter und dem Monde. Doch fielen die ohne Rücksicht auf Parallaxe und mit Benutzung mangelhafter astron. Kalender geführten Längenberechnungen aus diesen Beobachtungen noch sehr unvollkommen aus. Die erste beobachtete Monddistanz wird die von Gemma Frisius am 12. Juni 1540 zu Loewen sein, wo der Abstand des Mondes von β Scorpii gemessen, und mit Rücksicht auf die Mondparallaxe berechnet wurde. Im Jahre 1514 hatte Werner in Nürnberg diese Methode der Monddistanzen vorgeschlagen in seinen Anmerkungen zur Geographie des Ptolemäus. Lacaille machte im Jahre 1750 auf einer Reise nach dem Cap der guten

*) Peschel's Gesch. der Erdkunde. München 1865 p. 366.

Hoffnung solche Längenbestimmungen, Maskelyne desgleichen auf einer Reise nach St. Helena im Jahre 1761. Lacaille und Maskelyne haben am meisten zur Einführung dieser Längenbestimmung in der nautischen Astronomie beigetragen. Um nahe dieselbe Zeit ist Niebuhr auf seiner Reise nach Arabien der erste gewesen, welcher die Längenbestimmung durch Monddistanzen bei geographischen Expeditionen zu Lande ausgeführt hat.

Die Monddistanzen verdrängten die Längenbestimmung aus Mondshöhen, welche noch von Bouguer für die nautische Astronomie empfohlen wurden, aber weniger Genauigkeit gewährten. Uebrigens konnten doch die Mondshöhen auf niedrigen Breiten, wo die Richtung der täglichen Bewegung mit der eigenen Bewegung des Mondes nahe zusammenfällt, mit einigem Erfolg angewandt werden. In neuerer Zeit ist die Methode der Längenbestimmung aus Mondshöhen für solche Gegenden auch wieder aufgenommen worden, mit der Verbesserung, correspondirende Höhen des Mondes zu beobachten.*) Eine dahin gehörige Methode von Prof. Kaiser in Leiden, wurde von Dr. Oudemanns für geogr. Ortsbestimmungen im indischen Archipel angewandt, **) nämlich die Beobachtung der Zeitunterschiede, bei welchen der Mond und ein Stern gleiche Höhen nach einander erreichen. Die Höhenparallaxe des Mondes dann in Rechnung gebracht, ergiebt den wahren Höhenunterschied. Derselbe wahre Höhenunterschied mit der bekannten Breite und Zeit, sowie mit der gemuthmassten Länge des Beobachtungsortes berechnet, entscheidet darüber, um wie viel die Länge zu verbessern ist, um die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung herzustellen.

§ 31. Längenbestimmung durch Chronometer.

Aus der Zeitangabe des Chronometers erhält man die Zeit des ersten Meridians, indem als bekannt vorauszusetzen ist: 1)

---

*) Lindenau in v. Zach's Monatl. Corr. Bd. 12 p. 541. Grunert: Astron. Nachr. Bd. 18 p. 343.

**) Gould's Astron. Journal Bd. 5 p 164.

der Stand des Chronometers oder der Unterschied zwischen der Chronometerzeit und der Zeit des ersten Meridians für einen gegebenen Tag; 2) der Gang des Chronometers oder der Betrag, um wie viel das Chronometer gegen mittlere Zeit täglich voreilt (gewinnt) oder zurückbleibt (verliert). Die Berücksichtigung von Stand und Gang des Chronometers giebt dann zu jeder beliebigen Beobachtung die Zeit des ersten Meridians aus dem, was das Chronometer gezeigt hat.

Der zweite Theil dieser Methode der Längenbestimmung beschäftigt sich mit der Berechnung der mittleren Ortszeit aus der beobachteten Höhe eines Gestirns (Zeitbestimmung Kap. VII). Endlich ist der Unterschied zwischen dieser Zeit und der Zeit des ersten Meridians die Länge, welche östlich oder westlich sich ergiebt, je nachdem die Ortszeit grösser oder kleiner als die Zeit des ersten Meridians ist. Diese zunächst in Zeit erhaltene Länge wird durch die Multiplication mit 15 in Grade und Minuten verwandelt.

Beispiel 1. Am 18. Juli 1860 ist zu Vitoria auf 42° 51′ N Breite und ungefähr 3° W Länge von Greenwich die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes = 26° 55′ von mir beobachtet worden, als ein Chronometer, berichtigt für Stand und Gang die mittlere Zeit in Greenwich $5^h\,5^m\,11^s$ Nachmittags angab. Die Berechnung der mittleren Ortszeit mit der Declination 20° 56′ N und der Zeitgleichung $5^m\,56^s$ (zur wahren Zeit zu addiren), ergiebt $4^h\,54^m\,32^s$, mithin die Länge in Zeit = 10 39^s oder in Graden 2° 39′ 45″ W von Greenwich.

Die Genauigkeit einer Längenbestimmung durch Chronometer beruht auf der Zuverlässigkeit des Chronometers selbst. Für die zweckmässige Bestimmung des andern Theils, nämlich der Ortszeit aus der beobachteten Höhe, ist (nach § 27) die Höhe im ersten Verticel oder doch, soweit thunlich, in der Nähe desselben zu beobachten. Die Nähe des Gestirns am Meridiane ist auch in dem Falle kein Hinderniss wenn sie nur zugleich in der Nähe des ersten Verticals ist.

Beispiel 2. Abends am 1. Januar 1844 um etwa 10½ Uhr auf 46° N Breite und 131° geschätzter W Länge von

Greenwich, als ein Chronometer $7^h\ 31^m.47^s$ zeigte, wurde die Höhe des Sterns Capella $88^0\ 9'$ über dem Seehorizonte beobachtet. Der Stern war westlich vem Meridiane. Indexfehler $+ 3'\ 15''$. Augeshöhe 28 Fuss. Das Chronometer war am 9. Nov. 1843 $21^m\ 54^s$ voraus gegen mittl. Zeit in Greenwich gewesen und hatte täglich $7^s,9$ verloren. Die Länge zu bestimmen.

Auflösung. Zunächst ergiebt sich der Stundenwinkel des Sterns $= 0^h\ 10^m\ 50^s$, da die Declination des Sterns $45^0\ 50'$ N, die Rectascension desselben $5^h\ 5^m\ 14$ und die mittlere Rectascension der Sonne $= 18^h\ 44^m\ 8^s$ war. Die mittlere Ortszeit demnach $= 10^h\ 31^m\ 56^s$ und verglichen mit der mittleren Greenwicher Zeit, welche $7^h\ 16^m\ 52^s$ wurde, oder $19^h\ 16^m\ 52^s$ um von demselben Zeitpunkte zu zählen, so ist die Länge $= 8^h\ 44^m\ 56^s = 131^0\ 14'$ W.

Für die Längenbestimmung durch Chronometer aus Sonnenhöhen war man in der nautischen Astronomie gewohnt, die Höhen Vormittags oder Nachmittags zu beobachten, mit Vermeidung der Höhen in der Nähe des Meridians. Wenn indessen, wie in den tropischen Gegenden, die Sonne erst in der Nähe des Meridians zum ersten Verticale gelangte, so war kein Grund vorhanden, die Höhen in der Nähe des Meridians zu vermeiden. Im Gegentheil musste es vortheilhaft sein, die astronomische Längenbestimmung ebenfalls wie die Breitenbestimmung nahe bei dem Mittage zu erlangen, um beide Bestimmungen sofort im Journale für den Mittag aufnehmen zu können, während sonst eine grössere Reduction wegen der Ortsveränderung des Schiffes bis zum Mittage erforderlich war und dieselbe wegen unbekannter Strömungen auch unsicher ausfallen konnte. Hat man dabei mehrere Höhen observirt, so lassen sie sich auch paarweise combiniren und nach der Auflösung des ersten Theils im Douwes'schen Problem berechnen. Es ist danach nämlich mit den früheren Bezeichnungen:

$$\sin \tfrac{1}{2}(t' + t) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(h-h') \cos \tfrac{1}{2}(h+h')'}{\sin \tfrac{1}{2}(t'-t) \cos \varphi \cos \delta}$$

wobei also $t'-t$ die verflossene Zeit und φ die aus der Mittagshöhe bekannte Breite anzuwenden ist. Für den Fall, wo die

Höhen h und h' einander gleich werden, hat man wieder correspondirende Höhen, und dann ist $t = -t'$ oder $t + t' = 0$, da die Stundenwinkel verschiedene Zeichen auf den verschiedenen Seiten des Meridians erhalten. Die Grösse $\frac{1}{2}(t' + t)$ giebt immer den Stundenwinkel für die Mitte zwischen beiden Beobachtungen und derselbe liegt also auf der Seite des Meridians, wo die kleinere Höhe beobachtet ist.

Nach dieser Methode von Littrow, *) die auch ausserhalb der Tropen noch bis 43° Breite und darüber unter günstigen Umständen mit sehr gutem Erfolge nach den Resultaten des Admirals v. Wüllerstorf angewandt wurde, ist das folgende Beispiel berechnet.

Beispiel 3. Am 30. August 1858 auf 11° 55' N Breite und 147° 35' östlicher Länge von Paris wurden auf der Fregatte Novara folgende Beobachtungen angestellt, wobei die Höhe des Auges 19 Fuss und der Indexfehler — 2' 52'' betrug. Das Chronometer war $4^m\ 22^s,4$ zurück gegen mittlere Pariser Zeit, die Declination der Sonne 9° 11' N und die Zeitgleichung + $0^m\ 37^s,8$ (zur wahren Zeit zu addiren).

---

*) Annalen der Wiener Sternwarte Bd. 21. 1841.

Aggiunte al Almanaco nautico per l'anno 1843 et 1844 publ. dal Dr. Gallo, Trieste.

Ueber die Methode der Längenbestimmung durch Differenzen von Circummeridianhöhen und deren Anwendung während der Weltumsegelung S. M. Fregatte Novara. Von Carl v. Littrow, Wien 1863.

Sur une méthode nouvelle proposée par M. de Littrow, pour déterminer en mer l'heure et la longitude; par M. Faye. Vienne 1864 (Extr. des comptes rendus. 7 Mars 1864).

Die Bezeichnung „durch Differenzen von Circummeridianhöhen" ist wohl nicht ganz passend, da die Höhen selbst nicht zu entbehren sind, und ihr etwaiger Fehler hier wirksam genug durch $\cos \frac{1}{2}(h + h')$ im Resultate werden kann, wenn die Höhen nicht in correspondirende übergehen.

Nr.	Chronom. Zt.	Höhe des untern Sonnenrandes
1	$13^h\ 47^m\ 7^s,2$	$84^0\ 27'\ 50''$
2	13 47 40,4	84 35 0
3	13 48 13,2	84 41 45
4	13 51 23,3	85 20 5
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
15	14 20 12,4	85 24 20
16	14 23 43,2	84 42 0
17	14 24 36,8	84 30 35
18	14 24 54,8	84 27 0

Hieraus ergaben sich folgende Resultate:

Comb. Beob.	Intervall	Stand d. Chron. gegen wahre Ortszeit	
Nr. 1—18	38 Min.	$9^h\ 54^m\ 0^s,7$	Mittel $= 9^h\ 54^m\ 1^s,0$
2—17	37 „	9 54 1, 5	
3—16	36 „	9 54 0, 9	
4—15	29 „	9 54 1, 0	

und daher die Länge des Beobchtungsortes $= 9^h\ 54^m\ 1^s,0 + 37^s\ 8 - 4^m\ 22^s,4 = 9^h\ 50^m\ 16^s,4$ östlich von Paris $= 9^h\ 59^m\ 37^s,0$ östlich von Greenwich.

Ein constanter Fehler von einer Minute in den Höhenmessungen hätte hierbei einen Fehler von $3^s,4$ in der Zeit hervorgebracht, wenn $\frac{1}{2}(t' + t) = 16^m\ 11^s$ ist, wozu $\frac{1}{2}(h + h') = 85^0\ 9'$ gehört. Bei gleichen (correspondirenden) Höhen wird der Einfluss auf die Zeitbestimmung ganz verschwindend.

Auf hohen Breiten und namentlich bei entgegengesetzter Declination der Sonne, muss diese Methode, in der Nähe des Mittags die Länge zu bestimmen natürlich sehr ungenau wer-

den; aber früher vermied man gleichsam grundsätzlich die Nähe des Mittags für Zeitbestimmungen auf dem Meere, auch in den günstigsten Fällen, wo die Sonne daselbst zum ersten Verticale gelangte. Der Vortheil, zugleich mit der Breite auch die Länge durch astronomische Beobachtungen zu erhalten, ist übrigens selbstverständlich.

Diese gleichzeitige Bestimmung von Breite und Länge wird auch von der Auflösung des Douwes'schen Problems dargeboten, wenn man die Chronometer für die Angabe der Uhrzeiten benutzt hat. Eine indirecte Auflösung hierzu ist die Methode des Capit. Sumner,*) wobei die Correctionen durch Hülfe zweier Ortslinien in der Seekarte erledigt werden, deren Durchschnitt den gesuchten Ort des Schiffes geben muss, soweit man sich auf das Chronometer verlassen kann. Man berechnet z. B. mit der einen Höhe, der Declination und der geschätzten Breite den Stundenwinkel, wodurch also die Länge bekannt wird; wiederholt darauf mit einem etwas geänderten Werthe der Breite diese Rechnung, so hat man 2 Oerter in der Karte, in deren Verbindungslinie der Ort des Schiffes liegen muss, wenn das Chronometer ohne Fehler ist. Nun wiederholt man entweder dasselbe Verfahren mit der zweiten Höhe in gleicher Weise, wenn diese zweite Höhe zur Zeitbestimmung nicht unbrauchbar ist; so ergiebt sich eine zweite Ortslinie in der Karte, deren Durchschnitt mit der vorigen Ortslinie den gesuchten Punkt liefert. Oder falls sich die eine Höhe besser zur Breitenbestimmung eignet, bestimmt man damit aus dem Stundenwinkel und der Declination die Breite. Der Stundenwinkel hängt hier vom Chronometer ab und diese Rechnung wird daher mit zwei angenommenen Längen, also gleichfalls zweimal durchgeführt. Zur Vermeidung eines unsichern Durchschnitts der Ortslinien

---

*) A new and accurate method of finding a ships position at sea . . . . by Captain Thomas Sumner. Boston 1843. — Veranlassung dazu soll eine Reise des Verfassers von Charleston nach Greenock gewesen sein, wo er im Dec. 1837 bei stürmischem Wetter unter der irischen Küste war. S. a. L. A. Paludan: Lärebog in Navigationen, Kiöbenhavn 1852.

sucht man die Beobachtung so einzurichten, dass die Differenz der Azimuthe hinreichend gross ist, womöglich 90 Grade beträgt.

§ 32. Längenbestimmung aus Monddistanzen.

Bei der Längenbestimmung aus Monddistanzen dient die gemessene Distanz, wegen ihrer schnellen Veränderung, zur Bestimmung der Zeit des ersten Meridians, da diese Distanzen schon in den nautisch-astronomischen Kalendern für die Zeit des ersten Meridians voraus berechnet sind. Die vor der Vergleichung einer observirten Distanz mit diesen vorausberechneten Distanzen, erforderliche Correction zur Reduction auf den Mittelpunkt der Erde ist bereits in Kap. IV enthalten. Die Zuverlässigkeit dieser Art von Längenbestimmung ergiebt sich aus der Geschwindigkeit, womit die Monddistanzen sich verändern, und aus der Genauigkeit mit welcher die Beobachtungen anzustellen sind. Die Geschwindigkeit der Veränderung einer Monddistanz folgt aus der Umlaufszeit des Mondes um die Erde. Da die siderische Umlaufszeit des Mondes $27^1/_3$ Tage, und die synodische Umlaufszeit $29^1/_2$ Tage beträgt, so ergiebt sich $\frac{360}{27\frac{1}{3}} = 13^0{,}2$ und $\frac{360}{29\frac{1}{2}} = 12^0{,}2$ für die tägliche durchschnittliche Aenderung der Distanzen zwischen Stern und Mond, respective zwischen Sonne und Mond. Von diesen durchschnittlichen Aenderungen der Monddistanzen kommen aber erhebliche Abweichungen vor, theils wegen der elliptischen Bahn des Mondes, wonach die Bewegung desselben in der Erdnähe um ein Drittel schneller als in der Erdferne ist, theils wegen der übrigen Veränderlichkeiten in der Mondbewegung durch den Einfluss der Sonne, wie auch endlich wegen der mehr oder weniger günstigen Lage der ausgewählten hellen Sterne in Beziehung auf den Weg des Mondes. So geschieht es, dass auch Monddistanzen, deren tägliche Aenderungen nur 8 bis 9 Grade betragen, noch zur Anwendung kommen, freilich mit verhältnissmässig geringerer Genauigkeit für die Längenbestimmung, während andererseits der Betrag der täglichen Aenderungen in sehr günstigen Fällen auf 15 bis 16 Grade steigen kann. Bei der Wahl der zu obser-

virenden Distanzen wird also auch dieser Umstand zu berücksichtigen sein. Denn da der Fehler für die Längenbestimmung im Durchschnitt $= \frac{24}{12} \times 15$, also das Dreissigfache des Fehlers der observirten Distanz beträgt, so verwandelt sich diese Zahl 30 in den extremen günstigen und ungünstigen Fällen in 22½ und in 45.

Aus der Lage der Mondbahn, welche einen Winkel von 5° 0′ bis 5° 19′, im Durchschnitt 5° 8′ mit der Ekliptik bildet, hat sich die Auswahl derjenigen Fixsterne ergeben, welche in der Richtung des Mondlaufes liegen und daher am besten für die Monddistanzen wegen der möglichst schnellen Veränderung geeignet sind. Es sind die folgenden 9 Fixsterne:

α Arietis, Aldebaran, Pollux, Regulus, Spica,
Antares, α Aquilae, Fomalhaut und α Pegasi.

Die zum Theil noch helleren Sterne, wie Sirius und Arcturus (Breite — 39° und + 30°) mussten hierbei ausgeschlossen werden, weil sie nicht in der Nähe der Ekliptik liegen, also auch nicht nahe genug in der Richtung des Mondlaufes. Schon α Aquilae (Breite + 29°) liegt ungünstig entfernt von der Ekliptik, und der hellere Stern Capella (Breite + 22°) wäre vorzuziehen gewesen, da er der Ekliptik um 7° näher ist.

Später sind noch (anfangs durch specielle Ephemeriden von Schumacher *) die 4 hellsten Planeten:

Venus, Mars, Jupiter und Saturn

hinzugefügt werden, welche daher zusammen mit der Sonne und den festen Sternen jetzt 14 schon immer vorausberechnete Monddistanzen darbieten, wenn die wechselnde Lage der Mondsbahn

---

*) Tabeller over Distancerne mellem Maanen og de fire Planeter Venus, Mars, Jupiter og Saturn for 1822. Kiöbenhavn 1821. Dieselben, auch in englischer Sprache, wurden bis zum Jahre 1832 fortgesetzt, und sind in den grössern englischen und französischen Ephemeriden ohne Unterbrechung weiter geführt worden.

und der Ort des Mondes selbst, eine zu diesen Gestirnen für den beabsichtigten Fall passende ist.

Was die grosse Verschiedenheit in der für die Anwendung so wichtigen Veränderung der Monddistanzen betrifft, so kann auch die Wirkung der Refraction diese Aenderungen der beobachteten Distanzen erheblich vermindern. Die scheinbare Distanz könnte nämlich bei einer sehr niedrigen Höhe, wenn die schnelle Veränderung der Refraction der Veränderung der Distanz entgegenwirkt, zu einer ganzen unsicheren Längenbestimmung führen, denn wenn die scheinbare Distanz sich sehr wenig oder beinahe gar nicht veränderte, so würde aus Beobachtungen derselben auch überhaupt kein sicheres Resultat für die entsprechende Zeit sich ergeben. Ausserdem sind die sehr niedrigen Höhen, schon wegen der Ungenauigkeit der Refraction, wo möglich ganz zu vermeiden.

Um zu der aus den Beobachtungen reducirten wahren Distanz die entsprechende Zeit des ersten Meridians zu finden, dienen die aus der Voraussetzung einer gleichförmigen Aenderung der Distanzen berechneten Proportional-Logarithmen (§ 18). Die vorkommende Abweichung von dieser gleichförmigen Aenderung veranlasst die Berücksichtigung der zweiten Differenzen bei den von 3 zu 3 Stunden berechneten wahren Distanzen. Um aber diese umständlichere Interpolation zu erleichtern dient die im Naut. Alm. wie im Naut. Jahrbuche (Tab. I) und in den nautischen Tafelsammlungen gegebene Hülfstafel, woraus der Betrag für die zweiten Differenzen durch Correction des Proportional-Logarithmus zu entnehmen ist. Die Tafel ist bis zu dem äussersten Falle ausgedehnt, wo eine Vernachlässigung der zweiten Differenzen, einen Fehler von 43 Secunden in Zeit oder 11 Bogenminuten für die Länge hervorbringen würde.

Die Höhen sind entweder gleichzeitig mit den Distanzen beobachtet, welches der gewöhnliche Fall in der Nautik ist, der also 3 Beobachter erfordert; oder es kann auch ein einzelner Beobachter die Höhen und Distanzen nach einander beobachten, und hieraus, unter Voraussetzung, dass sich die Höhen der Zeit proportional ändern, alle Beobachtungen auf ein Zeitmoment re-

duciren, wofür am passendsten das arithmetische Mittel aus den Uhrzeiten der Distanzobservationen genommen wird.

Ein Beispiel der letzteren Beobachtungsart ist das folgende auf einer Reise nach Sierra Leona vorgekommene. Beobachter: Capt. Diederichsen.

Chronometerzeit.	Beobachtungen.	
$3^h\ 31^m\ 11^s$	51 50′	Höhe des untern Sonnenrandes
34. 57.	76. 57.	„ „ obern Mondrandes
37. 0.	51. 33. 30	Distanz der Ränder
38. 6.	51. 33. 45	„ „ „
38. 58.	51. 34. 0	„ „ „
39. 49.	51. 34. 30	„ „ „
41. 3.	49. 41.	Höhe des untern Sonnenrandes
42. 46.	78. 26.	„ „ obern Mondrandes

Die Breite des Beobachtungsortes war 22° 8′ N, die geschätzte Länge 35° W von Greenwich; Datum der Beobachtung: 4. April 1843. Von dem Chronometer muthmasste man, dass es $1^h\ 13^m\ 21^s$ zurück gegen mittlere Zeit in Grw. wäre. Die Höhe des Auges betrug 10 Fuss, und der Indexfehler des Instruments, womit alle Beobachtungen angestellt waren, + 2′ 15″.

Hieraus soll die Länge gefunden und der Stand des Chronometers geprüft werden.

Auflösung. Zuerst ist das arithmetische Mittel aus den beobachteten Distanzen = 51° 33′ 56″ und das Mittel der zugehörigen Chronometerzeit $3^h\ 38^m\ 28^s$. Die Höhen reducirt auf denselben Zeitpunkt, mit Hülfe der genäherten Annahme, dass die Höhen sich den Zeiten proportional ändern, ergeben für die Sonnenhöhe 50° 15′ und für die Mondhöhe 77° 37′. Die reducirten Werthe für $4^h\ 51^m\ 49^s$ mittlere Zeit in Greenwich sind aus der nautischen Ephemeride folgende: Halbmesser der Sonne 16′ 0″, Halbmesser des Mondes 15′ 2″, Vergrösserung desselben 15″, Horizontal-Parallaxe des Mondes 55′ 8″; Declination der Sonne 5 38′ N, Zeitgleichung + $3^m\ 9^s$ (zur wahren Zeit zu addiren). Die beiden letzten Grössen sollen zur Bestimmung der Ortszeit aus der Sonnenhöhe dienen. Es ergiebt sich nun für

die scheinbaren Höhen und die scheinbare Distanz der Mittelpunkte:

$$s = 50^0\ 30', \quad m = 77^0\ 21', \quad d = 52^0\ 7'\ 28''.$$

Der Beobachter hat hierauf nach der kürzesten Näherungsformel (§ 18, Formel 37) die wahre Distanz mit der Horizontalparallaxe P = 55′ 8″ bestimmt, also nach der Formel gerechnet:

$$d' = d - P\frac{\sin s}{\sin d} + P\frac{\sin m}{\operatorname{tg} d} + \text{Corr. f. Refr. etc. (aus d. Taf.)}$$

und findet:

$$d' = 52^0\ 7'\ 28'' - 53'\ 34'' + 41'\ 51'' + 1'\ 0''$$
$$= 51^0\ 26'\ 25''.$$

Die wahre Distanz nach der Fphemeride ist um 3^h in Greenwich = $51^0\ 3'\ 52''$ und um 6^h ist sie $1^0\ 24'\ 10''$ grösser; demnach gehört zu d′ die mittlere Zeit in Greenwich = $4^h\ 52^m\ 23^s$, mithin war das Chronometer, welches $3^h\ 38^m\ 28^s$ gezeigt hatte, $1^h\ 13^m\ 55^s$ zu spät gegen mittlere Zeit in Greenwich. Die mittlere Schiffszeit, berechnet mit der zweiten wahren Höhe = $50^0\ 29'$ und der Declination $5^0\ 38'$ N nebst der Breite $22^0\ 8'$ N ergab $2^h\ 31^m\ 19^s$ wahre Schiffszeit oder $2^h\ 34^m\ 18^s$ mittlere Schiffszeit, also das Chronometer war $1^h\ 6^m\ 35^s$ voraus gegen die mittlere Zeit des Beobachtungsortes, und da es $3^h\ 38^m\ 28^s$ zeigte als die Distanzen beobachtet waren, so wird $2^h\ 31^m\ 53^s$ die dazu gehörige mittlere Schiffszeit, welche von $4^h\ 52^m\ 23^s$ m. Grw. Zt. subtrahirt, die Länge des Beobachtungsortes = $2^h\ 20^m\ 30$ = $35^0\ 7\frac{1}{2}'$ W Länge übrig lässt.

Als Beispiel, worin die Höhen erst zu berechnen sind, indem nur die Distanzen beobachtet wurden, können die folgenden, unter etwas ungünstigen Umständen angestellten Beobachtungen dienen.

Mit einem Sextanten von Troughton, dessen Indexfehler + 6′ 20″ war, sind am 28. Decbr. 1846 auf 53^0 33 N Breite und ungefähr 10^0 angenommener O Länge die folgenden Distanzen zwischen Sonne und Mond gemessen worden, wobei die Uhr $2^m\ 10^s$ zu spät gegen die mittlere Ortszeit zu setzen ist und die meteorologischen Instrumente Folgendes angaben: Baro-

meter = 30,5 Engl. Zoll = 28 Zoll 7,4 Lin. französisches Maass, Thermometer = — 6°,5 R:

	Uhrzeiten.		Distanzen.
	$2^h\ 59^m\ 49^s$		131° 31′ 0″
	3. 2. 23.		31. 10.
	3. 5. 27.		32. 50.
	3. 10. 17.		33. 30.
	3. 14. 7.		36. 20.
Mittel	3. 6. 25.		131. 32. 58.
Uhrf.	+ 2. 10.	Ind. F.	+ 6. 20.
M. Orts Z.	3. 8. 35.		131. 39. 18.

Für die entsprechende ungefähre mittlere Zeit in Greenwich = $2^h\ 48^m$ giebt die Ephemeride folgende zur Berechnung der Höhen dienende Hülfsgrössen:

Sonne.		Mond.	
Mittl. R. A.	$18^h\ 26^m\ 42^s$	R. A.	$3^h\ 6^m\ 44^s$
Declin.	23° 18′ S	Declin.	15° 28′ N
Zeitgleichung	$1^m\ 50^s$	Hor. Par.	57′ 30″
Halbmesser	16′ 17″	Halbmesser	15. 40.

womit die wahre Sonnenhöhe = 3° 13′ und die wahre Mondshöhe = 16° 36′ berechnet worden ist.

Die Resultate wurden nun folgende:

1) Ohne Rücksicht auf die meteorologischen Instrumente ist die scheinbare Sonnenhöhe 3° 25′ 54″, die scheinbare Mondhöhe 15° 44′ 2″, die scheinbare Distanz 132° 11′ 19″, die wahre Distanz 131° 59′ 0″ und damit die Länge = 10° 33′ O.
2) Wenn Barometer und Thermometer berücksichtigt werden, so ergiebt sich die scheinbare Sonnenhöhe 3° 27′ 17″, die scheinbare Mondhöhe 15° 44′ 22″, die scheinbare Distanz 132° 11′ 19″, die wahre Distanz 131° 59′ 43″ und die Länge = 10° 12′ O.
3) Mit Rücksicht ausserdem auf die Contraction der Halbmesser durch die Refraction, welche für die Sonne 8″, für den Mond Null wird, ist die scheinbare Distanz 132° 11′ 11″, wahre Distanz 131° 59′ 35″, Länge 10° 16′ O.

4) Wenn auch noch die Abplattung der Erde in Rechnung genommen wird, so vermindert sich die Distanz um 4″, so dass die wahre Distanz 131° 59′ 31″ und die Länge = 10° 18′ O wird.

Hat man zunehmende und abnehmende Distanzen von ungefähr gleicher Grösse beobachten können, so erhält man als Mittel aus den Längen durch beide Beobachtungsreihen ein Resultat, welches frei von den Fehlern des Instruments ist, da in dem einen Falle z. B. eine zu gross gemessene zunehmende Distanz die Zeit des ersten Meridians um ebensoviel vorausrückt, wie in dem anderen Falle eine um ebensoviel zu gross gemessene abnehmende Distanz diese Zeit zurückschiebt, also das Mittel aus beiden Resultaten für die Länge die grösste, durch Monddistanzen überhaupt erreichbare Genauigkeit gewähren muss.

IX. Kapitel.

Bestimmungen der Abweichung der Magnetnadel vom Meridiane.

§ 33. Erklärungen.

Die Abweichung der Magnetnadel vom Meridiane (magnetische Declination, Missweisung oder Variation des Compasses) soll vor den Europäern schon den indischen und arabischen Seefahrern, besonders aber den Chinesen bekannt gewesen sein, welche bereits im hohen Alterthume die Magnetnadel, zunächst auf Landreisen, gebrauchten. *) Columbus entdeckte 1492 eine Linie ohne magnetische Abweichung $2\frac{1}{2}$ Grad östlich von den Azoren, **) und benutzte schon auf seiner zweiten Reise (1496) die Aenderungen der Missweisung von Ort zu Ort, um sich über die Länge zu orientiren. Wegen des nicht sehr grossen Betrags der magnetischen Missweisung auf den gewöhnlichsten Reisen wurde die Sache von Manchen noch lange Zeit für zweifelhaft gehalten, selbst zu der Zeit von Baffin, der aber im Jahre 1616 unter 78° Breite eine westliche Wissweisung von 56 Graden fand, welches die grösste damals beobachtete Missweisung war. ***)

Eine Karte der sogenannten isogonischen Linien auf

*) Ed. Biot, Compt. rend. 1844 p. 362. Humboldt, Kosmos IV. p. 170.

**) Humboldt, Kosmos IV p. 53.

***) O. Peschel Geschichte der Erdkunde p. 386.

der Erde, welche die Punkte von gleicher magnetischer Abweichung mit einander verbinden, ist zuerst von Halley für das Jahr 1700 construirt worden. Eine spätere Karte von Mountain und Dodson für 1744 und eine Karte von Lambert für 1770,*) endlich die neueren und vollständigeren Karten von Gauss und Weber zeigen die allmähligen Veränderungen dieser Isogonen. So ging z. B. die Linie, welche die Oerter ohne Missweisung oder den magnetischen Meridian im atlantischen Meere bezeichnet, im Jahre 1700 näher an der afrikanischen als an der amerikanischen Küste entlang und schnitt den Aequator ziemlich genau unter der Länge der Insel Ferro. Dagegen wird im Jahre 1744 von derselben Curve schon der amerikanische Continent bei Cap St. Roque berührt**) und gegenwärtig geht dieselbe bedeutend landeinwärts durch Brasilien, den Aequator unter 45° Länge westlich von Greenwich schneidend.

Dass eine in ihrem Schwerpunkte unterstützte, horizontal schwebende Nadel nach ihrer Magnetisirung die horizontale Lage verlässt und mit derselben einen Winkel bildet, die magnetische Inclination, wurde 1544 von Georg Hartmann in Nürnberg entdeckt, und vollkommener 1572 von Robert Normann, dem Erfinder des Inclinatoriums, welcher um diese Zeit die Richtung der Inclinationsnadel für London bestimmte. Die Linien, welche die Punkte gleicher Inclination verbinden, die isoklinischen Linien, erstrecken sich im Allgemeinen nach östlicher und westlicher Richtung. (Aeltere Karten darüber sind vorhanden von Wilcke in der schwed. Abh. f. 1768, neuere von Hansteen, Gauss und Weber). Die Linie, wo keine Inclination vorhanden ist, der magnetische Aequator, schneidet den geographischen Aequator in zwei Punkten, deren einer im atlantischen Meere auf 10° O Länge, der andere im stillen Ocean auf ungefähr 175° W Länge von Greenwich liegt. Die Punkte des grössten Abstandes dieser Isocline vom geogr. Aequator sind auf ungefähr 15° nördlicher Breite in Arabien und 15° südlicher Breite

*) Berliner Astr. Jahrb. f 1779.

**) Bouguer, Traité de Navigation. Planche X.

in Brasilien. Von den magnetischen Polen oder den Punkten, wo die Inclination 90 Grade beträgt ist nach Gauss der eine nördliche in Amerika auf 73° N Breite und 96° W Länge von Greenwich, der südliche Pol dagegen unter Vandiemansland auf 73° S Breite und 152° O Länge. John Ross und Dumont d'Urville beobachteten zuerst in der Nähe dieser Pole die fast 90 Grade betragende Inclination. Nach den magnetischen Polen hin convergiren im allgemeinen die isogonischen Linien, jedoch ist ausserdem noch eine gesonderte Abtheilung von Isogonen in Ostasien vorhanden, wo die Punkte mit gleicher magnetischer Declination in kleinen Ovalen liegen und eine Linie ohne Missweisung sich unter derselben gleichfalls befindet. Die beiden andern Hauptlinien ohne Missweisung sind: 1) die westliche Linie, welche vom magnetischen Nordpole durch die Vereinigten Staaten von Nordamerika, Westindien, Brasilien und den südatlantischen Ocean nach dem magnetischen Südpole verläuft; 2) die östliche Linie vom magnetischen Südpole mitten durch Neuholland, den indischen Ocean und den persischen Meerbusen nordwestlich gerichtet durch Sibirien ins nördliche Eismeer gehend.

Ausser der magnetischen Declination (Variation) und Inclination ist auch die Intensität oder Stärke der magnetischen Kraft überhaupt an verschiedenen Orten der Erde verschieden. Resultate über diese verschiedene Intensität sind besonders von Humboldt und Gauss erlangt worden. Im Allgemeinen ist die Intensität in den wärmeren Gegenden der Erde, am Aequator, am schwächsten, an den Polen stärker, und in der südlichen Polargegend stärker als in der nördlichen. Die Linien von gleicher magnetischer Krafft, die isodynamischen Linien, zeigen z. B., wenn in einer bestimmten Aequatorialgegend die Intensität = 1 gesetzt wird, dass im nördlichen Amerika die Intensität = 1,76 und in einer Gegend südlich von Neuseeland dieselbe bis auf 2,20 steigt, also hier mehr als die doppelte Stärke von der Intensität der angenommenen Aequatorialgegend erreicht. Uebrigens ist die kleinste Intensität nicht gerade unter dem Aequator sondern u. a. auf 20° S Breite bei der Insel St. Helena,

wo sie = 0,81 gefunden wurde. Die Zahlen beziehen sich auf die totale Intensität, welche aus den Intensitäten in Declination und Inclination zusammen gesetzt ist. Je grösser die Inclination, desto weniger Intensität bleibt für die horizontale Kraftrichtung, also für die Abweichung der Magnetnadel übrig.

Die magnetischen Declinationen und Inclinationen sind den Beobachtungen zufolge Veränderungen unterworfen, welche durch Jahrhunderte continuirlich fortschreiten (s ä c u l a r e Aenderungen). In Europa, wo jetzt die westliche Abweichung stattfindet, war sie früher östlich, z. B. für Paris im Jahre 1580 = 11° 30′ östlich, im Jahre 1663 = 0, im Jahre 1780 = 19° 55′ westlich, im Jahre 1835 = 22° 4′ westlich und im Jahre 1852 = 20° 25′ westlich beobachtet. Die westliche Abweichung ist also jetzt wieder im Abnehmen. Sie betrug für Göttingen im Jahre 1835 noch 18° 39′,3 und im Jahre 1841 nur 18° 9′,6, hatte sich also jährlich um 5 Minuten vermindert. Ebenso ist die Inclination säculären Aenderungen unterworfen, für Paris z. B. im Jahre 1780 = 72° 47′ und im Jahre 1852 nur 66° 42′, also abnehmend gefunden worden.

Ausser den säcularen Aenderungen kommen kleine Aenderungen von kurzen Perioden vor (p e r i o d i s c h e Aenderungen), welche aber nur durch Beobachtungen an grossen sorgfältig aufgehängten Magnetnadeln (Magnetometer) sich erkennen lassen, da ihr Betrag innerhalb eines halben Grades bleibt, oft nur wenige Minuten ist. Solche tägliche Schwankungen zeigen sich z. B. für Göttingen von Sonnenaufgang an, wo das Nordende der Nadel etwas nach Westen geht, und nachdem sie am Nachmittage ihren grössten westlichen Stand erreicht hat, bis gegen Mitternacht ostwärts zurückkehrt. Am stärksten wurden die Schwankungen im Sommer, am geringsten im Winter beobachtet. Auch bei der schwerer zu messenden Inclination sind tägliche kleine Aenderungen bemerkt worden.

Fernere Schwankungen erleidet die Nadel bei der Erscheinung des Nordlichtes, so dass durch Wahrnehmung solcher unregelmässigen Bewegung am Tage schon für den Abend ein

Nordlicht vermuthet werden konnte. Das Nordlicht wurde selbst als ein magnetisches Ungewitter (v. Humboldt) erklärt.

Der Magnetismus der Nadel kann auch durch heftige Erschütterungen und in Folge eines Gewitters seine Polarität umkehren, so dass das frühere Nordende nach Süden zeigt. In diesem Falle ist durch Bestreichung der Nadel mit einem vorräthig gehaltenen Magnetstäbchen die frühere Polarität wieder herzustellen, oder die Nadel auf der Windrose umzulegen. Man streicht von der Mitte der Nadel aus mit dem Südende des Magnetstabes nach demjenigen Ende des Nadel hin, welches Nordende werden soll und umgekehrt. Vom grössten Werthe für die Schifffahrt ist es, dass alle Magnetnadeln an demselben Orte und zu derselben Zeit einerlei Richtung haben und selbst die auf gedachte Weise gestörten Nadeln nur die genau entgegengesetzte Richtung annehmen.

Für die nautischen Anwendungen ist die magnetische Declination oder Variation des Compasses die Hauptsache. Die Bestimmung derselben bei dargebotener Gelegenheit durch eigene Observationen würde auch dann noch nicht zu versäumen sein, wenn der Betrag derselben für alle Gegenden der Erde schon genügend bekannt wäre oder gar für die Zukunft berechnet werden könnte, welches vielleicht niemals zu erreichen ist. Die ungefähre Kenntniss der magnetischen Abweichung vom Meridian würde zwar im Allgemeinen genügen, wenn nicht die locale Attraction aller Eisentheile des Schiffes hinzukäme, wodurch die Nadel des Compasses vom magnetischen Meridiane selbst abweicht. Schon dieser Deviation wegen ist die Bestimmung der wirklichen Richtung der Nadel immer von Neuem für den nautischen Gebrauch erforderlich.

§ 34. Durch Azimuth-Beobachtungen die Abweichung der Magnetnadel von der Mittagslinie zu bestimmen.

Hat man zu irgend einer Zeit die Richtung eines Gestirns z. B. der Sonne durch einen Peilcompass bestimmt, also das von Norden oder Süden nach Osten oder Westen gezählte magne-

tische Azimuth erhalten, so giebt die Berechnung des wahren Azimuths A als Supplement des Winkels am Zenith in dem Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Gestirn die Vergleichung, wonach die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung zunächst die deviirende Missweisung ist. Um nach einer allgemeinen Regel zu entscheiden, ob diese Missweisung östlich oder westlich sei, kann man von der Mitte des Compasses nach der gepeilten Richtung auf der Windrose hinsehen und bemerken, ob der Ort des berechneten Azimuths auf derselben Windrose rechts oder links von der Peilung liegt, wo in dem ersten Falle östliche, in dem andern westliche Missweisung sich ergiebt.

Die Berechnung des wahren Azimuths A mittelst der als bekannt vorausgesetzten Breite φ des Beobachtungsortes, der Declination δ des Gestirns oder der Polardistanz $p = 90 - \delta$, und der zugleich bei der Peilung observirten und auf die wahre Höhe $= h$ reducirten Höhe des Gestirns, kann nach einer der bekannten Formeln geschehen, z. B.

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi + h + p) \cos \frac{1}{2} (\varphi + h - p)}{\cos \varphi \cos h}}$$

Für den Fall, dass $\frac{1}{2}$ A zu nahe an 90 Grad wäre, hätte man

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (p + \varphi - h) \sin \frac{1}{2} (p + h - \varphi)}{\cos \varphi \cos h}}$$

Beispiel. Am 4. März 1851 wurden auf der Seekadettenschule in Kiel die folgenden Beobachtungen mit einem Azimuth-Compass nach der s. g. Schmalkalder'schen Construction angestellt, wobei ein Prisma zur Ablesung der Theilung, und ein diamentral gegenüberliegender Spiegel zur Projection des visirten Objectes auf die horizontale Richtung dient. Die Sonnenhöhen wurden über einem künstlichen Horizonte beobachtet mit einem Reflexionsinstrumente, dessen Indexfehler + 1′ 30″ war. Die Uhrcorrection auf mittlere Ortszeit betrug + 40 Secunden, die Declination der Sonne — 6° 37′; die Zeitgleichung war 12 Min. 4 Sec. von mittlerer Zeit zu subtrahiren.

Uhrzeiten.	Sonn. Unt. Rand. dopp. Höh.	Beob. Azim.	Magnet. Abweich.
8h 27m 28s	26° 19′ 45″	N 140° O	17° 47 W
33. 45.	27. 12. 0.	141.	17. 11.
40. 45.	29. 34. 30.	142.	16. 52.
44. 47.	30. 23. 30.	143.	16. 55.
47. 50.	31. 0. 0.	143½.	16. 43.
49. 11.	31. 33. 0.	144½.	17. 26.
54. 44.	32. 40. 0.	146.	17. 38.
		Mittel =	17. 13. W.

Am 11. März 1851 wurden die Beobachtungen wiederholt, nachdem der Spiegel und das Prisma durch Umsetzung ihre Stellen vertauscht hatten. Die Uhr war bei diesen Beobachtungen 5 Min. 42 Sec. zu früh für die mittlere Ortszeit, der Indexfehler + 1′ 30″, die Zeitgleichung 10 Min. 22 Sec. und die Declination der Sonne 3° 53′ S.

Uhrzeiten.	Höhe Unt. Rd.	Beob. Azim.	Magnetische Abweichung.
8h 31m 22s	30° 52′	N 138° O	17° 25′ W
8. 39. 0.	32. 39.	139½.	17. 10.
8. 41. 45.	33. 14.	140½.	17. 31.
8. 49. 1.	35. 7.	143.	18. 24.
8. 54. 32.	36. 33.	144,3.	18. 27.
8. 57. 54.	37. 9.	145.	18. 19.
9. 0. 50.	37. 29.	145,9.	18. 27.
		Mittel =	17. 57.
		in der vorigen Lage =	17. 13.
		Gesammt-Resultat =	17° 35 W.

als Ergebniss aus 14 Beobachtungen in verschiedenen Lagen des Instruments, wodurch der Excentricitätsfehler aufgehoben wurde.

In Betreff der geeignetsten Zeit für die Azimuthbeobachtungen, könnte man mit Rücksicht auf etwaige Ungenauigkeit

der als bekannt vorausgesetzten Grössen, die zur Berechnung des wahren Azimuths dienen, diejenige Stellung des Gestirns wählen, wenn es möglich ist, wo der Winkel am Gestirn zwischen dem Verticalkreise und dem Stundenkreise ein rechter Winkel ist, mithin das Azimuth ein Maximum würde und sich daher wenig veränderte. Das gäbe den Stundenwinkel t aus der Formel

$$\cos t = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \delta.$$

Doch kommt hierbei als wichtiger Umstand in Betracht, dass bei sehr grossen Höhen (nahe am Zenith) die Azimuthmessung ungenau wird, selbst wenn das Azimuthinstrument auch mit einem Spiegel zur Reflexion der Strahlen nach horizontaler Richtung versehen ist.

Geht man zu dem Falle über, wo das Gestirn sich im Horizonte befindet, so führt dies zur Amplitudenrechnung (§ 35).

Bei einem festen Standpunkte kann man noch das wahre Azimuth eines terrestrischen Gegenstandes durch wiederholte Beobachtungen sehr genau bestimmen, indem man z. B. den Abstand der Sonne von demselben Gegenstand misst und die Azimuthdifferenz zwischen der Sonne und dem Gegenstande aus 3 gegebenen Dreieckseiten berechnet. Die Hinzufügung des gleichfalls berechneten Azimuths der Sonne giebt dann das wahre Azimuth des terrestrischen Gegenstandes, und durch Vergleichung mit dem beobachteten magnetischen Azimuthe die gesuchte magnetische Abweichung. Statt der Messung des Abstandes der Sonne von dem Gegenstande ist auch die horizontale Winkelmessung mittelst des Theodolithen zu empfehlen, besonders durch Vergleichung mit dem Polarsterne.

§ 35. Bestimmung der magnetischen Abweichung durch Amplituden.

Bei der Stellung eines Gestirns im Horizonte ist es gebräuchlich, die horizontale Richtung vom Ost- oder Westpunkte an zu zählen und dieser Bogen des Horizonts erhält den Namen

Amplitude. Für die Sonne liegen nämlich der Ost- und Westpunkt bei dem Auf- oder Untergange (ausgenommen auf hohen Breiten) immer näher als der Nord- oder Südpunkt und daher hat die kleinere Zahl den Vorzug erhalten.

Wird die wahre Amplitude mit α bezeichnet, so giebt das rechtwinklige sphärische Dreieck sogleich mittelst der Polhöhe φ und der Declination δ die Formel

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sec \delta.$$

Um aber bei der Amplitudenpeilung den richtigen Augenblick zu treffen, nämlich wo das Gestirn sich im wahren Horizont befindet, ist die Refraction und die Kimmtiefe zu berücksichtigen. Für die Sonne z. B. würde bei einer Höhe des untern Randes von 20 Minuten die scheinbare Höhe des Mittelpunktes 36 Minuten sein (den Halbmesser zu 16′ gerechnet), und wenn man für die Refraction und Kimmtiefe zusammen ebensoviel setzen kann, so wird dieser Betrag abgezogen die wahre Höhe auf Null bringen, also der richtige Zeitpunkt für die Peilung gewählt sein. Genauer wird das Resultat durch wirkliche Observirung der Höhe bestimmt, dann aber fällt das rechtwinklige Dreieck weg und die Berechnung ist wieder durch die Azimuthformel (§ 34) zu erledigen.

Kommt die Veränderung des Observationsortes nicht in Betracht, und ist auch die Aenderung der Sonnendeclination zu vernachlässigen, so wird aus einer observirten magnetischen Morgen- und Abend-Amplitude schon die halbe Differenz der beiden von Norden gezählten Peilungen die gesuchte Missweisung, (oder deren halbe Summe im Falle beide Bogen auf einer und derselben Seite vom Norden liegen, z. B. beide nach Osten). Die Benennung der Missweisung stimmt dabei immer mit derjenigen Seite überein, auf welcher der grössere Bogen liegt.

Das Verfahren der Amplitudenmessung kann sehr unsicher auf hohen Breiten werden, wo die tägliche Bewegung der Gestirne beinahe parallel mit dem Horizonte läuft, dagegen um so sicherer auf niedrigen Breiten, wo die Gestirne nahe senkrecht zum Horizonte auf- und untergehen.

Der Aufgang oder Untergang der Sonne ist für jede gegebene Breite und Declination schon in den nautischen Hülfstafeln berechnet, um die kleine Rechnung zu ersparen, wonach der gesuchte Stundenwinkel t oder die Zeit des Aufgangs aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke durch die Formel

$$\cos t = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

bestimmt werden kann, und der Untergang dann $= 12^h - t$ ist.

X. Kapitel.

Berechnung der Zeiten von Fluth und Ebbe.

§ 36. Allgemeine Beschreibung der Erscheinungen von Fluth und Ebbe.

1) Das Meer wird täglich von einer regelmässig wiederkehrenden Fluthwelle gehoben und gesenkt, welche, mit grosser Geschwindigkeit, aber nur sehr geringer horizontaler Strömung sich im Allgemeinen westlich und besonders nordwestlich gerichtet fortpflanzt. Die Geschwindigkeit dieser Undulation ist sehr verschieden, aber beispielsweise so, dass die Fluthwelle in 12 Stunden vom Cap der guten Hoffnung bis zum Cap Blanco gelangt. Die grösste Geschwindigkeit scheint im stillen Meere oder dem grossen Ocean vorzukommen, wo nach der Karte von Whewell sich die Fluthwelle in einer Stunde um 20 Grade oder 300 geogr. Meilen fortpflanzt, während sie in andern Theilen desselben Oceans freilich viel langsamer ist.

Auf hohen Breiten ist die Fluth sehr schwach und gewöhnlich über den 65sten Breitengrad hinaus kaum merklich, doch kommen auch hier Ausnahmen vor. Je weiter die Welle sich ausdehnen kann und je tiefer das Wasser ist, desto schneller ist im Allgemeinen ihre Bewegung. Enge Eingänge, wie die Strasse von Gibraltar, vermögen die Fluthwelle bei der Unterbrechung derselben durch die anliegende continentale Küste nur sehr abgeschwächt weiter zu fördern. Weite Mündungen, wie die des Amazonenstroms begünstigen die Fortsetzung der Fluth-

welle, welche dort noch über 100 Meilen stromaufwärts merklich ist. Eine starke horizontale Strömung nimmt die Fluthwelle erst bei aufsteigender Verflachung des Bodens, wie in den Flüssen an. Hier kann auch, vorzüglich durch die Vereinigung entgegen-strömender Gewässer und begünstigt durch besondere Verhältnisse eine sehr verstärkte Fluth eintreten. Als bekannteste Erscheinungen dieser Art hat man den Mascaret bei Bordeaux und die nach dem indianischen Namen genannte Pororoka an der südlichen Mündung des Amazonenstroms bemerkt, ferner im Flusse Savern im Bristolcanale und im Ganges.

Fluth bezeichnet das Steigen des Wassers, Ebbe das Sinken, doch wird auch der Anfang von Fluth und Ebbe oft kurzweg mit Fluth und Ebbe bezeichnet. Die Erscheinung von Fluth und Ebbe gemeinsam zu benennen, ist das Wort „Gezeiten“ einzuführen versucht worden, nach dem holländischen Getijden, engl. tides, franz. les marées.

2) Die Periode der Wiederkehr von einer Fluthwelle bis zur nächstfolgenden ist durchschnittlich 12 Stunden 25 Minuten 14 Secunden, also gerade so gross wie die durchschnittliche Dauer von einer Culmination des Mondes bis zur nächstfolgenden (obern oder untern) Culmination. Die Wiederkehr des hohen Wassers zeigt sich nämlich so mit dem Mondlaufe im festen Zusammenhange, dass allemal zwischen Neumond und Vollmond so viele Fluthzeiten wie Mondsculminationen verfliessen, und das hohe Wasser im Allgemeinen um dieselbe Tageszeit am Neu- und Vollmondtage wieder eintritt. Diese Zeit des hohen Wassers am Neu- und Vollmondtage wird Hafenzeit (heure du port, établissement du port) genannt, und ist zwar für verschiedene Oerter, selbst in verhältnissmässig geringer Entfernung von einander, oft sehr verschieden, jedoch für einen und denselben Ort unveränderlich.

Die Abhängigkeit der Fluth und Ebbe von der Stellung des Mondes zur Sonne kann keine zufällige und nur genähert stattfindende sein, sonst würden z. B. die Hafenzeiten der Oerter im vorigen Jahrhundert von den gegenwärtigen wenigstens hinreichend merklich abweichen, welches den Beobachtungen zufolge

nicht der Fall ist. *) Aus der Dauer des synodischen Monats $= 29{,}5306$ mittl. Tagen erhält man $\frac{360^0}{29{,}5306} = 12^0\ 11'\ 26'' =$ $0^h\ 48^m\ 45^s{,}8$ für die durchschnittliche relative Bewegung des Mondes in einem mittleren Tage, und hieraus nach der Proportion:

$$24 : 24 + x = 48^m\ 45^s{,}8 : x$$

$x = 50^m\ 28^s{,}5$ für die s. g. tägliche Verspätung des Mondes bei seiner Rückkehr zu demselben Meridiane, oder $24^h\ 50^m\ 28^s{,}5$ mittl. Zeit ist die durchschnittliche Dauer von einer obern Culmination bis zur folgenden, mithin $12^h\ 25^m\ 14^s$ die Dauer von einer obern oder untern Culmination zur andern. Die wahre Bewegung des Mondes kann hiervon abweichen und statt der mittleren Verspätung $= 50^m\ 28^s{,}5$ sich von 40^m bis zu 64^m als tägliche Verspätung erstrecken. Auch die tägliche Verspätung der Fluth ist veränderlich und z. B. in Brest von 36^m bis 83^m beobachtet worden. **)

Der Verlauf des Steigens und Fallens ist im Allgemeinen an jedem Orte so, dass man nach Laplace's Bemerkung den ganzen Vorgang durch eine einfache Construction im Kreise, entsprechend der Formel

$$x = a\,(1 - \cos t)$$

darstellen kann, wenn t die seit dem höchsten Wasserstande verflossene Zeit bezeichnet und dabei 180 Grade $= 12^h\ 25^m\ 14^s$ gesetzt werden, a den halben Unterschied zwischen dem höchsten und niedrigsten Wasserstande, x aber das Stück bezeichnet, um welches das Wasser zur Zeit t gesunken ist. x ist daher der Sinusversus des Bogens t und wächst für kleine Werthe von t dem Quadrate der Zeit proportional. Diese Formel gilt freilich

*) Einen Fall wo durch den Bau eines langen Hafendammes die Hafenzeit sich um eine Viertelstunde änderte, führt Bouguer an (Navig. p. 119 Edit. Paris 1781): J'ai vu, à la Côte de Bretagne, l'établissement des marées au Croisic y changer d'environ un quart-d'heure, parce qu'on avoit rétréci l'entrée de ce port par une longue jettée.

**) Laplace Mechanik des Himmels, Th. 2, p. 330, Burckhardt. Bohnenberger Astronomie p. 683.

nicht in den Flüssen, wo die Fluthwelle strömend eindringt und der eigenen Stömung des Flusses entgegen steht. Während sonst im Allgemeinen 6 Stund. 12 Min. als die Dauer zwischen dem höchsten und niedrigsten Wasser anzunehmen ist, wird z. B. für Altona die Dauer der Fluth nur 4^h 35^m und die Dauer der Ebbe 7^h 50^m. Die Zeit des Stromwechsels (engl. slack water) trifft auch nicht überall mit der Zeit des hohen und niedrigen Wassers genau zusammen, und ferner ist die Richtung der Fluthströmung und Ebbeströmung an einigen Orten, wie bei den Scilly Inseln, keine einfach entgegengesetzte, sondern variirt daselbst durch alle Compassstriche *).

3) Ausser der halbtägigen Periode ist vorzugsweise eine halbmonatliche Ungleichheit bemerklich. Die durchschnittliche Zeit von 12 Stund. 25 Min. ist nämlich etwas geringer in den Syzygien (bei Neu- und Vollmond), wo sie zu 12 St. 18 Min. herabsinken kann, und andererseits grösser in den Quadraturen (bei dem ersten und letzten Viertel) wo sie sich bis zu 12 St. 41 Min. erhebt. Diese Ungleichheiten summiren sich von Tag zu Tag und machen die s. g. Correction für den Einfluss der Sonne**) aus. Wären sie nicht vorhanden, so folgte das hohe Wasser dem Monde, und man hätte nur zur Culminationszeit des Mondes die Hafenzeit zu addiren, um die Zeit des hohen Wassers zu erhalten. Wird die halbmonatliche Ungleichheit vernachlässigt, so kann der Fehler bis 1 St. 24 Min. für die berechnete Zeit des hohen Wassers sich belaufen.

In den Syzygien findet zugleich eine grössere Fluthöhe statt, die s. g. Springfluth (springtide) und in den Quadraturen eine geringere Fluthöhe (Neaptide, Nippfluth, dän. slap flod, schlaffe Fluth, holländ. doove tijd, taube Fluth).

---

*) Whewell (Phil. Transact. London 1833, P. 1, p. 215: Revolving Tide-Currents).

**) Halbmonatliche Ungleichheit, semimenstrual inequality, von Lubbock genannt.

Für verschiedene Oerter ist die Fluthhöhe sehr verschieden. Im freien Ocean wird der mittlere Werth von a ungefähr drei Fuss*) angenommen; an den Küsten aber, namentlich durch das gleichzeitige Eintreffen mehrerer Fluthwellen von entgegengesetzter Richtung und durch die Verstärkung vermöge der Gestalt der Küsten kann die Fluth auf 50 Fuss und darüber steigen, besonders wenn sie durch Nebenumstände befördert wird. Die höchsten Fluthen hat man in der Fundy-Bai in Nordamerika beobachtet, ausserdem in dem Canal zwischen Irland und England und zwischen Frankreich und England. An der französischen Küste zu Brest sind schon im Anfange des vorigen Jahrhunderts auf Veranlassung der Pariser Akademie 6 Jahre hindurch regelmässige Fluth- und Ebbe-Beobachtungen angestellt worden, aus denen Daniel Bernoulli**) die noch heute in der Navigation gebräuchliche Tafel der halbmonatlichen Ungleichheit als Correction für den Einfluss der Sonne berechnete. Dieselben Beobachtungen sind von Cassini und Lalande benutzt worden. Sie wurden später vollständiger fortgesetzt und bildeten die Grundlage der ausgedehntesten theoretischen Untersuchungen von Laplace.

4) Die höchsten Fluthen oder Springfluthen erfolgen nicht genau am Tage des Neu- und Vollmondes, sondern $1\frac{1}{2}$ Tage später, wenigstens nach den besten Beobachtungen an der europäischen Küste, so verschieden auch die Hafenzeiten der Oerter sein mochten. Eben so war die dritte Fluth nach der Quadratur, oder $1\frac{1}{2}$ Tage nach dem ersten oder letzten Viertel, die niedrigste.

5) Die Fluthen werden stärker in der Erdnähe des Mondes, schwächer in der Erdferne. Die Differenz kann den obigen Beobachtungen zufolge 5 bis 6 Fuss betragen. Eine fernere kleine Vergrösserung der Fluth hat sich im Zusammenhange mit der Erdnähe der Sonne, also im Winter ergeben. Die Correction der Fluthzeit für den Einfluss der Sonne (halbmonatliche

*) So fand man die Fluthhöhe am Cap der guten Hoffnung, bei St. Helena, bei den Philipinischen und Molukischen Inseln. Lalande Astron. § 3773.

**) Traité sur le Flux et Reflux de la Mer. Paris 1740.

Ungleichheit) wird am grössten gegen die Zeit Quadraturen und bei der Erdferne des Mondes*).

6) Im Anfange des Frühlings und Herbstes sind die Springfluthen höher als gewöhnlich, die Quadraturfluthen niedriger. Umgekehrt ist es im Anfange des Sommers und Winters.

7) Zwischen den auf einander folgenden Fluthen eines und desselben Tages ergaben sich Unterschiede, welche, abgesehen von zufälligen Mitwirkungen durch Wind und Strömung, ebenfalls im Zusammenhange mit der Stellung von Mond und Sonne in den verschiedenen Jahreszeiten sich erwiesen haben.

8) Neben den allgemeinen Erscheinungen kommen in einzelnen Gegenden besondere Unregelmässigkeiten vor, welche auf locale Einflüsse deuten, namentlich durch Vereinigung der von verschiedenen Seiten kommenden Fluthwellen, welche auch in der Form von Interferenzerscheinungen die Wirkung der einzelnen Fluth aufheben oder theilweise unterbrechen können. In der Nordsee z. B., wo Fluthwellen vom Süden und vom Norden eindringen, erscheint an einem Theil der jütländischen Küste die Fluth nur sehr abgeschwächt; ihre Fortsetzung aber im Kattegat ist fast verschwindend. Merkwürdiger ist noch das Vorkommen von nur einmaligen Fluthen in 24 Stunden, welches schon Newton**) für den ostindischen Golf von Tong-king anführt, und wovon in den Philos. Transact. 1684 p. 681 eine Beschreibung von Davenport und Knox gegeben war***). Ausser solchen einfachen Tagfluthen, die ebenfalls bei der Insel Juan Fernandez und ferner an der Küste von Neuholland bemerkt sind, geht die Unregelmässigkeit nach der andern Seite

*) Eine Verwechselung, unbekannten Ursprungs, die sich in mehrere nautische Tafeln eingeschlichen zu haben scheint, würde freilich das entgegengesetzte Resultat geben. Der Fall wird weiter unten (§ 37) zur Erörterung kommen.

**) Princip. Lib. III. Prop. 24.

***) S. a. Brandes in Gehler's Physik. Wörterb. Bd. 3, p. 56.

zu doppelten Halbtagfluthen, welche man z. B. an der Südküste von England bei Poole*) wahrgenommen hat.

§ 38. Erklärung der allgemeinen Erscheinungen nebst der Berechnung der Fluthzeiten.

Wenn allen Beobachtungen gemäss, die Hauptursachen von Fluth und Ebbe vorzüglich auf den Mond, und demnächst auf die Sonne bezogen werden mussten, und auch schon im Alterthume so gedeutet worden sind,**) so gelang es doch erst Newton (1687) die Möglichkeit solcher Wirkungen durch die allgemeine Gravitation nachzuweisen. Newton konnte sich hierbei auf ähnliche Wirkungen beziehen, welche in dem Mondlaufe selbst durch die Anziehung der Sonne hervorgebracht werden. Die Sonne strebt nämlich den Mond zur Zeit der Syzygien von der Erde zu entfernen, indem sie die Schwerkraft der Erde gegen den Mond etwas vermindert, mag der Mond nun zwischen Erde und Sonne stehen, also stärker als die Erde von der Sonne angezogen werden, oder auf der entgegengesetzten Seite, wo die Erde stärker als der Mond von der Sonne angezogen wird, folglich ein Zurückbleiben des Mondes bei dem freien Falle beider Körper gegen die Sonne sich ergeben würde, immer wird in beiden Fällen die Schwerkraft der Erde gegen den Mond ein wenig vermindert. Eine kreisförmig um die Erde gedachte Mondbahn würde also durch einen solchen Einfluss der Sonne während dieser Stellung zu einem Ovale verlängert werden, und die zusammengesetzte Bewegung aus der Tangentialkraft und der Schwerkraft giebt durch die gedachte Verminderung der

*) Bobrik Handbuch der praktischen Seefahrtskunde. Bd. I, Leipzig 1848, p. 159.

**) In Strabo's Erdbeschreibung (Edit. Forbiger, Leipzig, 1856), Buch 3, Kap. 5 heisst es: „Tag und Nacht werden durch den Umlauf der Sonne gemessen, die bald unter, bald über der Erde ist; Posidonius aber sagt, die Bewegung des Oceans beobachte einen, dem der Gestirne ähnlichen Kreislauf und zeige, mit dem Monde übereinstimmend, einen täglichen, einen monatlichen und einen jährlichen Wechsel."



letzteren diesem Oval eine solche Richtung, dass die grosse Axe desselben sich senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Sonne und Erde stellt.

Auch die Form des Wassers müsste sich ovalförmig gestalten, wenn man die ganze Erde mit Wasser bedeckt annimmt, oder wenigstens die Aequatorialgegend, über welcher der Mond und die Sonne senkrecht stehen. Allerdings ist hier der Unterschied vorhanden, dass die Wassertheile nicht wie der Mond, frei im Raume um die Erde schweben, sondern mit dem Erdkörper selbst verbunden sind, jedoch die Eigenschaft der Flüssigkeiten, welche in der leichten Beweglichkeit aller ihrer Theile besteht, führt hier gleichfalls zu einem Ovale, dessen grosse Axe aber immer zur Sonne hin gerichtet ist, so lange man sich die Erde ohne Rotation denkt.

Sowohl die Sonne als der Mond werden zwar diejenigen Wassertheile stärker anziehen, welche ihnen näher sind als der Mittelpunkt der Erde, aber die dadurch allein hervorgebrachte kleine Verminderung der Schwerkraft an sich würde das einzelne Wassertheilchen nicht vermögen können, sich zu erheben, weil die Schwerkraft der Erde doch immer überwiegend grösser ist, als jene kleine Differenz der Anziehungen. Nimmt man aber die Gesammtwirkung auf alle Wassertheile hinzu, so kommen hierbei auch die schrägen Richtungen gegen den Erdradius in Betracht, wo sich dieselbe Differenz der Kräfte auf das Wasser äussert, und da lässt sich diese Richtung zerlegt denken in zwei Theile, deren einer senkrecht zum Erdradius ist, während der andere Theil in der Richtung des Erdradius liegt. Bei dem ersten Theile, der horizontal wirkt, kann die Schwerkraft der Erde nichts entgegen setzen, während der andere Theil in verticaler Richtung wirkt und nur eine kleine Verminderung der Schwerkraft hervorbringt. Der horizontalen Richtung werden nun alle Wassertheile folgen können, bis auf den Boden des Meeres. Und es wird sehr wenig horizontale Bewegung dieser Art von allen Seiten dazu gehören, um das Wasser unter dem Monde sehr merklich zum Anschwellen zu bringen.

Auf der dem Monde entgegengesetzten Erdhälfte wird fast

eben so stark sich im Grossen und Ganzen dieselbe Wirkung wiederholen, da es sich hier gleichfalls nur um beinahe dieselbe Differenz der Anziehung der Wassertheile und des Erdmittelpunktes von Seiten des Mondes handelt, und auch dabei dieselbe Verschiedenheit der Richtungen in Betracht kommt, mit welcher hier die schwächer angezogenen Wassertheile zusammengedrängt, also angehäuft werden.

Die Folge davon ist theils ein hoher Wasserstand an zwei gegenüberstehenden Punkten der Erde, theils ein niedriger Wasserstand ringsum in denjenigen Erdtheilen, welche um 90 Grade von den Fluthpunkten, die den Mond im Zenith oder Nadir haben, entfernt sind, also niedriger Wasserstand für die Oerter, wo der Mond im Horizont steht. An den Polen der Erde (den Mond im Aequator gedacht) wird daher dieser niedrige Wasserstand immer stattfinden, ohne Abwechselung von Ebbe und Fluth, welches die Erscheinung erklärt, dass auf sehr hohen Breiten Fluth und Ebbe im Allgemeinen unmerklich werden.

Bei der Annahme, dass der Mond in der Ebene des Aequators bleibt, werden durch die ostwärts gerichtete Umdrehung der Erde, dem Monde alle Seiten der Erde zugewandt, und daher muss die Fluthwelle im Aequator westwärts fortschreiten, jedoch so, dass immer andere Wassertheile zur Bildung der Fluthwelle in Anwendung kommen, bis nach Ablauf eines Mondtages die Fluthwelle wieder zu den ersten Wassertheilen zurückgekehrt ist. Eine Schätzung darüber, welche grosse Wassermassen hierbei in Bewegung sind, trotz der sehr geringen horizontalen Verschiebung der einzelnen Wassertheile, gab Bessel *) durch folgenden Ueberschlag. Eine Fluthhöhe von 3 Fuss über dem niedrigsten Punkte der Meeresfläche würde ungefähr 100 Kubikmeilen Wasser mehr für dasjenige Erdviertel ergeben, wo Fluth ist, als für das andere Erdviertel, wo zu derselben Zeit Ebbe stattfindet. Der Mond vermag also in 6¼

*) Bessel's Vorlesungen, Hamburg 1848 p. 166.

Stunden, wo Fluth und Ebbe gewechselt haben, eine Verschiebung von 200 Kubikmeilen Wasser auf der Erde hervorzubringen.

Dass aber die kleinen Gewässer für sich keine Fluth entstehen lassen können, erklärt sich aus der zu geringen Verschiedenheit in der Richtung der Kräfte, welche in den grossen Meeren die Fluth hervorbringen. Es kommt noch hinzu, dass ein Gewässer von geringer Tiefe auch nur eine geringe Fluth erzeugen kann. *)

Die Unterbrechungen des Meeres durch die grossen Continente verändern die einfache westlich gerichtete Fortpflanzung der Fluthwelle. Eine im stillen Ocean entstehende Fluthwelle wird durch die asiatische Küste, so wie durch Neuholland mit den dazwischen liegenden Inseln in ihrer Fortsetzung gehemmt; nachher bietet die afrikanische Küste für die Fluthwelle im indischen Ocean eine Unterbrechung; dann bildet im atlantischen Meere der ganze amerikanische Continent durch seine Erstreckung beinahe von Pol zu Pol eine grosse Unterbrechung jener Undulation. Auch die ungleiche Tiefe des Meeres kann Veränderungen in der Entstehung und Fortpflanzung der Fluthwellen veranlassen. **)

In ähnlicher Weise, wie für den Mond, hat man nun die von der Sonne allein herrührende Fluthwelle betrachten können. Da aber die Sonne beinahe 400 mal weiter entfernt ist als der Mond, und daher eine weit geringere Verschiedenheit der Grösse der Anziehung auf die verschiedenen Punkte des Erdkörpers eintritt, so hat doch andererseits die überwiegend grosse Masse der Sonne, welche die Mondmasse um das 28 Millionenfache

*) Bei kleinen abgeschlossenen Gewässern eine eben so sichtbare Fluth und Ebbe zu erwarten wie im grossen Ocean hiesse dem Monde einen um so weit grösseren Einfluss auf das kleine Gewässer beilegen, wie der Durchmesser der Erde grösser ist als die Ausdehnung jenes kleinen Gewässers — eine Bemerkung, die schon von Dan. Bernoulli gemacht, und von Lalande weiter demonstrirt wurde.

**) Ohne solche Unterbrechungen durch die Continente würde also die ganze Erscheinung viel einfacher so zu denken sein, dass alle Oerter unter demselben Meridiane gleichzeitig Hochwasser hätten und überhaupt die Fluthwelle ihren Weg um die Erde regelmässig in $24^{h}\ 50^{m}\ 28^{s}$ zurücklegte, soweit sie vom Monde abhängt.

übertrifft, ebenfalls zur Entstehung einer kleinen Fluthwelle sich wirksam genug gezeigt. Denn wenn auch alle Linien von der Erde zur Sonne als parallel angenommen werden, so besteht doch eine Verschiedenheit dieser Richtung gegen den Erdradius in den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche; und da nun der Erdhalbmesser zwar nur $\frac{1}{24000}$ der Entfernung der Sonne beträgt, so ist bei der Grösse der Anziehung überhaupt, auch diese kleine Differenz der Anziehung nach hinreichend zur Bewirkung einer Fluth. Die Periode dieser Sonnenfluth ist der Sonnentag.

Bei der Gesammtwirkung von Mond und Sonne auf die Erregung der Fluth ergiebt sich zunächst, dass in den Syzygien beide Fluthen sich zur s. g. Springfluth vereinigen; in den Quadraturen hingegen die Mondfluth mit der Sonnenebbe und umgekehrt zusammentreffen, so dass hier die Differenz beider Fluthen, mithin die geringere Fluth eintritt. Aus vielen Beobachtungen über Fluthhöhen hat man auch das Verhältniss der Antheile einer jeden Fluth, also das Verhältniss der Wirkungen von Mond und Sonne direct ermitteln können.

Beispiel. Durch eine grosse Menge von Beobachtungen zu zu Brest fand schon Lalande,*) dass die mittlere Fluthhöhe daselbst in den Syzygien 18 Fuss 3 Zoll und in den Quadraturen 8 Fuss 5 Zoll betrage. Hieraus das Verhältniss der Wirkungen von Mond und Sonne auf die Fluth zu bestimmen.

Auflösung. Da die Wirkungen unter gleichen Umständen ihren Ursachen proportional gesetzt werden können, so ist hier $x + y = 18\frac{1}{4}$ und $x - y = 8\frac{5}{12}$, wenn x die Wirkung des Mondes, y die der Sonne bezeichnet; folglich wird $\frac{x}{y} = 2{,}71$. Die Wirkung des Mondes zur Hervorbringung der Fluthwelle ist daher durch-

*) Astronomie III p. 525.

schnittlich beinahe $2\frac{3}{4}$ mal so gross als die Wirkung der Sonne.

Ferner ist nach dem Grundsatze der allgemeinen Gravitation die Anziehung immer direct proportional der Masse des anziehenden Körpers, und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Ist also M die Sonnenmasse, R die Entfernung der Sonne von der Erde; m die Mondmasse und r die Entfernung des Mondes von der Erde, so verhalten sich die Anziehungen selbst wie $\frac{M}{R^2}$ zu $\frac{m}{r^2}$. Aber da es sich bei der Fluth-erregung nur um diejenige kleine Differenz der Anziehungen handelt, welche von einer sehr wenig geänderten Entfernung herrührt, so ergiebt sich aus der Differenzirung dieser Betrag schon genähert, nämlich $-\frac{2 M dR}{R^3}$ und $-\frac{2 m dr}{r^3}$, wobei hier noch $dR = dr$ zu setzen ist. Die Wirkungen auf die Fluth stehen also im umgekehrten Verhältniss der Kuben der Entfernungen und im directen Verhältniss der Massen der anziehenden Himmelskörper. Die Fluthen würden demnach z. B. 8 mal so gross als gegenwärtig werden, wenn der Mond sich um die Hälfte seiner Entfernung der Erde nähern könnte; oder doppelt so gross bei gleichbleibender Entfernung wenn sich seine Masse verdoppelte.

Den obigen Beobachtungen zufolge ist nun

$$\frac{m}{r^3} : \frac{M}{R^3} = 2{,}71 : 1 \text{ oder } \frac{R^3 m}{r^3 M} = 2{,}71$$

woraus auch das Verhältniss der Massen beider Himmelskörper bestimmt werden kann, wenn die Entfernungen als bekannt angesehen werden; und die ungefähre Uebereinstimmung dieser Resultate mit den aus andern Methoden bestimmten Massen konnte wenigstens zur Bestätigung dienen.

Weiter lässt sich jetzt das Verhältniss der verschiedenen Fluthhöhen bei verschiedenen Entfernungen von der Erde bestimmen, da die Wirkung im umgekehrten Verhältniss der Kuben der Entfernungen, also im directen Verhältniss der Kuben

der **Parallaxen** stehen. So ergiebt sich z. B. für das Verhältniss der Mondfluth in der Erdferne und Erdnähe der Satz:

$$(53' \, 48'')^3 : (61' \, 30'')^3 = 1 : 1{,}494$$

folglich giebt die Erdnähe des Mondes eine $1\frac{1}{2}$ mal so grosse Fluth als die Erdferne.

Setzt man die mittleren Werthe der Sonnenparallaxe P = 8'',86 und der Mondsparallaxe p = 57' 2'',06 in Verbindung mit der Sonnenmasse M = 354710 *) und der Mondsmasse $m = \frac{1}{79{,}667}$ so wird:

$$\frac{p^3 \, m}{P^3 \, M} = 2{,}039$$

Die Wirkung auf die Fluth erscheint in dem obigen Beispiel noch etwas grösser, indem für dasselbe Verhältniss 2,71 aus Fluthbeobachtungen allein gefunden war, wobei freilich die Mitwirkung von Nebenumständen nicht ganz ausgeschlossen ist.

Um noch das Verhältniss der Kräfte von Sonne und Mond zur Hervorbringung von Fluth und Ebbe mit der Schwerkraft der Erde zu vergleichen, welche durch die Fallhöhe von 15,1 Pariser Fuss in der ersten Secunde, dargestellt werden kann, so ist zunächst für den Mond in runder Zahl die Mondmasse = $\frac{1}{80}$ der Erdmasse; ferner ist die Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkte = 60 Erdhalbmesser, daher die Anziehung des Mondes überhaupt $= \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{3600} = \frac{1}{288000}$ der Erdanziehung. Aber die Differenz der Anziehungskraft des Mondes zur Hervorbringung der Fluth ist für denjenigen Erdort, welcher den Mond im

---

*) Mit der Sonnenmasse nach Laplace Mec. cél. T. III, p. 63: M = 329630 aus Pendelversuchen und Annahme der Sonnenparallaxe = 27,''2 Decimal = 8,''8128 Sexagesimalsecunden = P, wird

$$\frac{p^3 \, m}{P^3 \, M} = 2{,}230$$

Zenith hat $= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{60}\right)^2} - 1 = \frac{1}{30} + \frac{3}{60^2} + \ldots$ Eben so wird die Differenz der Anziehung zwischen dem Erdmittelpunkte und dem Erdorte, wo der Mond im Nadir steht $= 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{60}\right)^2}$ $= \frac{1}{30} - \frac{3}{60^2} + \ldots$ Es ist also in beiden Fällen die Kraft des Mondes zur Erregung der Fluth ungefähr $\frac{1}{30}$ der ganzen Kraft, *) womit der Mond die Erde anzieht, folglich $= \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{288000}$ $= \frac{1}{8640000}$ oder nur ungefähr der 9 millionste Theil der Schwerkraft der Erde. Mit den genaueren Werthen erhält man dafür:

$$\frac{1}{79,667} \cdot \frac{1}{(60,2778)^2} \cdot \left\{ \left(\frac{60,2778}{59,2778}\right)^2 - 1 \right\} = \frac{1}{8507480}$$

und für die Kraft der Sonne zur Hebung des Wassers, indem mit der obigen Zahl 2,039 dividirt **) wird, ergiebt sich $\frac{1}{17347000}$ oder die Sonne wirkt auf die Hebung der Wassertheile 17 bis 18 Millionen mal geringer als die entgegengesetzt gerichtete Schwerkraft der Erde. Zusammengenommen sind daher bei der Springfluth die Wassertheile der Fluth nur um den 6ten Theil eines Millionstels leichter als die Wassertheile der gleichzeitigen Ebbe, welche um 90 Grade davon entfernt sind. Die daraus

*) Genauer im ersten Falle $= \frac{1}{29,25}$, und im andern Falle $\frac{1}{30,75}$.

**) Die Division mit der obigen correcteren Zahl 2,230 giebt $\frac{1}{18971704}$ oder die Schwerkraft der Erde wirkt nahe 19 Millionen mal stärker als die Sonne auf das Wasser.

allein folgende Niveaudifferenz würde also bei der geringen Tiefe des Meeres unmerklich sein. Aber bei den übrigen Wassertheilen kommt die Verschiedenheit der Richtung der Kräfte gegen die verschiedenen Erdradien hinzu, wo in Beziehung auf die Zerlegung nach horizontaler Richtung keine 19 millionenfach grössere Schwerkraft sich entgegensetzt, und die Fluth sonach aus der Gesammtwirkung auf alle Theile entspringen kann.

Die Aufgabe über Fluth und Ebbe besteht im Allgemeinen aus zwei Theilen:

1) Die Höhe der Fluth zu bestimmen und 2) die Zeit des Eintrittes derselben.

Von einer vollständigen Lösung dieser Aufgabe durch Vorherbestimmung konnte weder in dem einen noch dem anderen Theile die Rede sein, auch abgesehen von den unberechenbaren Einflüssen durch Wind und Strömungen, schon wegen der ungleichen Tiefe des Meeres und der zu mannigfaltigen Veränderungen der Fluthwelle durch die Lage der Inseln und Continente. *) Hiervon wurde also ganz abgesehen bei der hypothetischen Annahme des einfachsten Falles einer ganz mit Wasser bedeckten Erdkugel und einer gleichmässigen Tiefe des Meeres, die gegen den Erdradius als sehr klein vorausgesetzt werden konnte. Dies war die Annahme von Newton sowohl als auch in den drei berühmten Abhandlungen von Daniel Bernoulli, Euler und Maclaurin, welche im Jahre 1740 den von der Pariser Akademie für die Lösung des Problems der Fluth und Ebbe ausgesetzten Preis gewannen. Von allen diesen Autoren wurde auch die ganze Frage nur als eine Aufgabe des Gleichgewichts unter der Wirkung gegebener Kräfte betrachtet, indem das Gleichgewicht der Flüssigkeiten nur bei einer solchen Figur des Erdkörpers bestehen kann, wo die Resultanten der verschiedenen Kräfte zu der Oberfläche senkrecht sind.

Da aber dies Gleichgewicht bei der Fluth und Ebbe, wegen der Drehung der Erde und der Bewegung des Mondes

*) Dazu kann noch die Verschiedenheit des Luftdrucks gerechnet werden, wie man auch schon bei Beobachtungen von Fluthhöhen die Angabe des Barometerstandes in neuerer Zeit als erforderlich angesehen hat.

niemals zu Stande kommt, sondern dabei fortwährende Bewegung stattfindet, so hat Laplace*) zuerst die Aufgabe vollständiger als eine hydrodynamische behandelt, indem er zugleich auf die Bewegung der Wassertheile Rücksicht nahm. Freilich mussten auch hierbei die einfachen Hypothesen, wie vorhin, als Grundlage dienen; aber bei der Unmöglichkeit, die unbekannten Nebenumstände zu berücksichtigen, und wenn sie auch bekannt wären, dieselben in die Theorie so einzuführen, dass die Ergebnisse sich mit den Beobachtungen vergleichen liessen, wurde nur so viel als Grundsatz angenommen, dass die Oscillationen des Meeres periodisch seien, wie die Kräfte von Mond und Sonne, welche sie verursachen, jedoch nicht nothwendig denselben Kräften proportional gesetzt werden dürften, wie auch ihre Maxima und Minima nicht genau mit dem Maximum und Minimum der Kräfte übereinstimmen. **) Wenn also eine theoretisch vollständige Lösung der Aufgabe auch nach allem diesen nicht als möglich anzusehen ist, so bleibt doch die theoretische Bearbeitung einer langen Reihe von Beobachtungen als das Einzige übrig, welches in dieser Sache zu nützlichen Resultaten geführt hat und künftig weiter führen kann. ***)

In dieser Hinsicht sind es besonders die durch Lubbock und Whewell in England aufgenommenen Untersuchungen der Beobachtung der Fluthzeiten †) der verschiedenen Oerter, wodurch die Entwerfung einer Karte der gleichzeitigen Fluthwellen (Isorachien) geliefert worden ist, aus denen man die Richtung und Geschwindigkeit der successiven Fluthwellen ersehen kann; ferner eine freilich empirische Berechnungsmethode, die sich aber den Beobachtungen auf's Beste anzuschliessen sucht.

Für die Nautik ist der zweite Theil der Aufgabe, nämlich die Zeit des hohen Wassers zu bestimmen, von grösserer Wichtigkeit, als die Frage nach der Höhe desselben, und die

*) Mécanique céleste T. II Liv. IV. Paris 1795 und T. V Liv. XIII Paris 1825.

**) Laplace M. C. T. V. p. 155.

***) Grant, History of physical Astronomy. London 1852 p. 155.

†) Philos. Transact 1830—1834.

Lösung der Aufgabe ist auch in Bezug auf die Zeit verhältnissmässig weit besser gelungen, wie sie ebenfalls durch die Beobachtungen allgemeiner unterstützt werden konnte.

Daniel Bernoulli hat schon im Jahre 1740, *) als er noch Prof. der Anatomie und Botanik in Basel war, diejenige Auflösung dieser Aufgabe gegeben, welche bis jetzt in der nautischen Astronomie allgemein angewandt wird, obgleich diese Lösung nur auf den Bedingungen des hydrostatischen Gleichgewichts beruht, und die Wirkungen den Kräften, welche das Gleichgewicht stören, proportional gesetzt werden.

Vorausgesetzt wird also hierbei, dass die Erdkugel ganz mit Wasser bedeckt sei, dessen gleichmässige Tiefe jedoch im Verhältniss zum Erdhalbmesser sehr geringe ist, und dass der Mond und die Sonne sich in der Ebene des Aequators bewegen.

Die Anziehung des Mondes allein stört dann das Gleichgewicht dieser mit Wasser bedeckten Kugel der Art, dass sich dieselbe elliptisch ausdehnt, mit der grossen Axe zum Monde gerichtet. Alle Schnitte senkrecht zu dieser Axe sind Kreisschnitte, weil kein Grund vorhanden ist, dass irgend ein Punkt eines solchen Schnitts sich von der Axe weiter entferne als der andere. Ist die entstandene Figur auch nicht ganz strenge ein s. g. verlängertes Ellipsoid, da die zum Monde gerichtete halbe Axe ein wenig länger werden muss als die andere halbe grosse Axe, so konnte doch allen übrigen Untersuchungen zufolge, dieselbe sehr angenähert als ein verlängertes Rotationsellipsoid betrachtet werden. **)

*) Traité sur le Flux et Reflux de la Mer. (Devise: Deus nobis haec otia fecit). Pour concourir au Prix de 1740. Mém. Paris 1740. Auch abgedruckt in Le Soeur et Jaquier Edit. Princip. Newton. Genevae 1742. Tom. III p. 133 bis 246.

**) Will man nicht den ursprünglichen Weg verfolgen, auf dem das Resultat von Bernoulli erhalten wurde, so kann die Annahme des Ellipsoid's auch entbehrt werden, indem man von der Zerlegung der Kräfte ausgeht, welche auf einen beliebigen Punkt der Wasseroberfläche wirken, und davon die Wirkung auf den Erdmittelpunkt nach denselben Richtungen abzieht. Dann wird das Maximum für die Summe beider Wirkungen (von Mond und Sonne) zur Hebung des Wassers gesucht. Vgl. Dubois, Cours d'Astronomie, 2 Edit. Paris 1865 p. 549.

Nun ändert sich die ganze Masse der gedachten Kugel durch das Uebergehen in ein Ellipsoid nicht, folglich, wenn r den Halbmesser der Erdkugel, h die Höhe der Fluthwelle über dem früheren gleichmässigen Wasserstande, also r + h die halbe grosse Axe, r — k die halbe kleine Axe ist, so bleibt der Rauminhalt beider Körper gleich gross ausgedrückt durch:

$$\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \pi (r - k)^2 (r + h)$$

oder $r^3 = (r - k)^2 (r + h)$, folglich $0 = -2 r^2 k + r^2 h$ mit Weglassung der kleinen Grössen von der 2ten und 3ten Ordnung, da die Tiefe des Wassers im Vergleich zu r sehr geringe ist. Demnach wird $k = \frac{1}{2} h$, also die Erniedrigung des Wassers unter den früheren gleichmässig gedachten Stand ist nur halb so gross als die Fluthhöhe über demselben Wasserstande.

Wenn nun bei der täglichen Umdrehung der Erde die grosse Axe des Ellipsoids beständig zum Monde gerichtet bleibt,

Oder man beschränkt sich, ohne das Maximum direct zu suchen, auf die Betrachtung des Gleichgewichts im Zustande dieses Maximums, wonach die horizontalen Wirkungen sich gegenseitig aufheben müssen. Vgl. P. W. Tegner, Nautiske Astronomie 3. Afdel. Kiöbenhavn 1840—44 p. 377—396. In der Ausführung dieser guten Idee ist nun freilich gleich zu Anfang der Fehler begangen, dass die Zerlegung der Kräfte unrichtig berechnet ist, nämlich so, als wenn die Seitenkräfte senkrecht zu einander wären. Der Fehler hat auf das eine Hauptresultat noch keinen Einfluss, da er sich in gleicher Weise bei der Sonne wiederholt (der Coefficient ist jedesmal 3 statt 2), und es bei jenem Resultat nur auf das Verhältniss der Kräfte ankommt. Aber im übrigen sind die aus der irrigen Grundlage gezogenen Consequenzen fehlerhaft, welche sich auf Seite 380 und ff. finden. Seite 383 müsste es 1,12 statt 1,09 heissen, wenn der Factor $\frac{\cos D'}{\cos D}$ hinzukäme. Der richtige Factor ist aber $\left(\frac{\cos D'}{\cos D}\right)^2$ zu setzen wodurch die Zahlen sich in 0,77 bis 1,30 verwandeln. Seite 386: „Richter" bei Cayenne statt „Richer" wird ein Druckfehler sein. Leider sind alle diese Fehler auch übergegangen in das Lehrbuch der Navigation von Albrecht und Vierow 3. Auflage, Berlin 1866, wozu noch die unrichtige Uebersetzung einer Stelle kommt (§ 198: „den dritten Tag" statt „dritte Fluth"), die sich ebenfalls in den bisherigen Ausgaben dieses Lehrbuches als ein von Newton gefundenes Resultat wiederholt.

und daher für alle Punkte des Erdäquators täglich zweimal Fluth und Ebbe eingetreten ist, so hat jeder einzelne Ort eine Veränderung seines Wasserstandes von der Grösse $h + k = \frac{3}{2}h$ erlitten. Die Hälfte hiervon oder $\frac{3}{4}$ h ist demnach die Erhebung des Wassers über seinen jetzigen mittleren Stand, welcher also von dem früheren ungestört gedachten mittleren Stande (bei der Kugelform) zu unterscheiden ist, da die Fluth das Wasser über den letztern Stand um h gehoben, und die Ebbe es nur um $\frac{1}{2}$ h unter denselben Stand erniedrigt hat. Der jetzige mittlere Wasserstand ist also um $\frac{h - \frac{1}{2}h}{2} = \frac{1}{4}h$ höher als der frühere gleichmässige Stand bei der Kugelform.

Eben so wie hier für die Mondfluth ergiebt sich das Resultat für die durch die Sonne erregte Fluth. Denkt man sich nun beide Fluthen, jede für sich wirksam, also jede an ihrem Orte, d. h. gerade unter dem Monde und der Sonne, im Aequator zu Stande zu kommen bestrebt, so würden zwei Fluthwellen, eine grössere vom Monde und eine kleinere von der Sonne herrührend entstehen. In der Springfluth finden beide ihre Vereinigung, die Fluth der Quadratur ist das Resultat ihrer Differenz.

Für die Zeiten, welche zwischen diesen beiden besonderen Fluthen liegen ist nun der Ort der höchsten Fluth zu suchen als ein Ergebniss des Zusammenwirkens von Mond- und Sonnenfluth zur Hervorbringung eines Maximums. Dies Maximum als Gesammtfluth wird demnach zwischen beiden getrennt gedachten Fluthen liegen müssen, jedoch immer näher an der Mondfluth als der grösseren von beiden. Wenn also z. B. das hohe Wasser eines Ortes mit der Culminationszeit des Neumondes eintritt, so wird es vor dem Neumonde etwas später, nach demselben etwas früher als die Mondsculminationszeit erfolgen, wegen der Reihenfolge, wie der Mond, die Gesammtfluth und die Sonne nacheinander in den Meridian des Ortes gelangen. Für die Bestimmung der Zeit des hohen Wassers hat man daher überhaupt

vor dem Neumonde eine positive Correction, nach dem Neumonde eine negative Correction hinzuzufügen, wenn man von der Zeit der Mondsculmination ausgeht.

Bei der Berechnung dieser Correction wurde Bernoulli vorzüglich durch die vielen Beobachtungen unterstützt, welche seit dem Anfange des vorigen Jahrhunderts auf Veranlassung der Pariser Akademie der Wissensch. an der französischen Küste über Fluth und Ebbe gemacht waren, und die schon Cassini sehr geschickt empirisch verwerthet zu haben scheint, um die Zeit des hohen Wassers voraus zu bestimmen. Es kam aber noch darauf an, die Form dieser Correction in eine entsprechende mathematische Formel zu bringen, um hieraus eine zweckmässige Tafel zu berechnen. Diese Formel fand Bernoulli dadurch, dass er den Ort des oben gedachten Maximums suchte, nämlich den Ort der Gesammtfluth zwischen den beiden Oertern, welche resp. den Mond und die Sonne im Zenith haben. Er bediente sich im Wesentlichen des folgenden Verfahrens.

Es sei h′ die Fluthhöhe des Mondes für denjenigen Ort des Aequators, welcher den Mond noch nicht im Zenith hat, sondern davon um den Stundenwinkel t entfernt ist, so dass h′ noch nicht die volle Fluthhöhe des Mondes bezeichnet, sondern r + h′ nur die Entfernung des Mittelpunktes von der Oberfläche des Ellipsoids für diesen Ort darstellt, wenn r der Radius der ursprünglich gedachten Erdkugel ist, bevor sie in das verlängerte Meeresellipsoid überging. Die halben Axen des Hauptschnitts sind nach dem Vorhergehenden r + h und r − ½ h. Ferner sind r sin t und r cos t die rechtwinkligen Coordinaten in Beziehung auf den Kreisschnitt. Die Verlängerung der Kreisordinate r sin t bis zum Ellipsoid werde mit v bezeichnet, so dass v zu h′, wie eine Kathete zur Hypothenuse gedacht werden kann, indem der kleine Ellipsenbogen, nahe senkrecht zu h stehend, als zweite Kathete anzusehen ist. Hieraus folgt weiter:

$$\frac{h'}{v} = \frac{r \sin t}{r}, \; h' = v \sin t, \; r \sin t = \sqrt{r^2 - r^2 \cos t^2}$$

$r \sin t + v =$ Ordin. der Ellipse

$$= \frac{r - \frac{1}{2} h}{r + h} \sqrt{(r + h + r \cos t)(r + h - r \cos t)}$$

$$= \frac{r - \frac{1}{2} h}{r + h} \sqrt{(r + h)^2 - r^2 \cos t^2}$$

$$= \frac{r - \frac{1}{2} h}{r + h} \sqrt{r^2 - s^2 + 2 r h},$$ wenn man $r \cos t = s$ setzt und h^2 weglässt.

Ferner ist durch einfache Division $\frac{r - \frac{1}{2} h}{r + h} = 1 - \frac{3}{2} \frac{h}{r} + \frac{3}{2} \frac{h^2}{r^2} + \ldots$ wo gleichfalls h^2 wegzulassen ist, und weiter

$$\sqrt{r^2 - s^2 + 2 r h} = \sqrt{r^2 - s^2} + \frac{r h}{\sqrt{r^2 - s^2}} + \ldots,$$

$$\frac{r - \frac{1}{2} h}{r + h} \sqrt{r^2 - s^2 + 2 r h} = \sqrt{r^2 - s^2} + \frac{r h}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

$$- \frac{3}{2} \frac{h \sqrt{r^2 - s^2}}{r} = v + \sqrt{r^2 - s^2};$$

$$v = \frac{r h}{\sqrt{r^2 - s^2}} - \frac{3}{2} \frac{h \sqrt{r^2 - s^2}}{r} = h \frac{3 s^2 - r^2}{2 r \sqrt{r^2 - s^2}},$$

welches mit der Bernoullischen Formel übereinstimmt, wenn man nach dortiger Bezeichnung $h = \frac{2}{3} \beta$ setzt. Da nun v (die Verlängerung der Kreisordinate bis zur Ellipse) $= 0$ wird für $3 s^2 = r^2$, $s = r \sqrt{\frac{1}{3}} = r \cos 54^0 44' = r \cos 3^h 39^m$, so würde nach $3^h 39^m$ (Mondszeit) vor oder nach der Culminationszeit des Mondes der frühere mittlere Stand des Wassers im Aequator eintreten, *) soweit es vom Monde allein abhängt, dessen Wirkung auf das Wasser auch sogleich im Resultate zu Stande kommend gedacht wird, ohne durch die Trägheit des Wassers aufgehalten zu werden.

---

*) Bernoulli l. c. p. 170.

Endlich hat man $h' = v \sin t = v \frac{\sqrt{r^2 - s^2}}{r}$

$= h \frac{3s^2 - r^2}{2r^2} = \frac{1}{2} h (3 \cos t^2 - 1)$.

Ebenso in Beziehung auf die Sonne allein, wenn g die Fluthhöhe über der früheren Kugeloberfläche bei demjenigen Orte im Aequator ist, in dessen Zenith die Sonne steht, g' aber die entsprechende Fluthhöhe des Ortes, welcher um den Stundenwinkel t' von dem ersten Orte entfernt ist, und wenn $r \cos t' = s'$ gesetzt wird:

$$g' = g \frac{3s'^2 - r^2}{2r^2} = \frac{1}{2} g (3 \cos t'^2 - 1).$$

Die Summe beider Fluthhöhen ist daher

$$h' + g' = \frac{1}{2} h (3 \cos t^2 - 1) + \frac{1}{2} g (3 \cos t'^2 - 1)$$

und jetzt ist die Frage nach dem Maximum dieser Summe beider an sich kleinen Fluthen d. i. die gesuchte Gesammtfluth. t und t' sind dabei als variabele Grössen anzusehen, jedoch ist $t + t'$ als der gegebene Rectascensiosunterschied zwischen Sonne und Mond nicht variabel. Der dem Maximum entsprechende Werth von t ist dann der Rectascensionsunterschied zwischen dem Monde und der Gesammtfluth, also die gesuchte Correction, welche an die Culminationszeit des Mondes anzubringen ist, um die Zeit des hohen Wassers zu erhalten.

Die Differenzirung zur Bestimmung des Maximums giebt

$$0 = h \cos t \sin t \, dt + g \cos t' \sin t' \, dt', \text{ daher}$$

$$1) \quad \sin 2t' \, dt' = -\frac{h}{g} \sin 2t . dt$$

Nimmt man zur weiteren Entwickelung der Bedingung des Maximums mit Bernoulli die identische Gleichung $\sin t' = \sin (t + t') \cos t - \cos (t + t') \sin t$, oder da es auf $\sin 2t'$ ankommt, das Quadrat der letzten Gleichung:

$$\sin t'^2 = \sin (t + t')^2 \cos t^2 + \cos (t + t')^2 \sin t^2$$
$$- 2 \sin (t + t') \cos (t + t') \sin t \cos t$$

so giebt die Differenzirung derselben:

2) $\sin 2\,t'.\,dt' = -\sin(t+t')^2 \sin 2\,t\,dt$
$+\cos(t+t')^2 \sin 2\,t\,dt - \sin 2\,(t+t')\cos 2\,t\,dt$

Die Gleichsetzung der Werthe aus (1) und (2) führt zu der Gleichung

$$-\frac{h}{g} = \cos 2\,(t+t') - \sin 2\,(t+t')\,\text{cotg}\,2\,t, \text{ daher}$$

$$3)\ \text{tg}\,2\,t = \frac{\sin 2\,(t+t')}{\cos 2\,(t+t') + \frac{h}{g}}$$

welches die gesuchte Correction t für die gemachten Voraussetzungen ist. *) Diese Corr. wird also in 3 Fällen $=0$: 1) für $t+t'=0$ oder die Springfluth bei Neumond; 2) für $t+t'=90$ oder die Quadraturfluth; 3) für $t+t'=180$ oder die Springfluth bei Vollmond.

Eine nach dieser, nur in einer weniger bequemen Gestalt

*) Bei der entsprechenden Formel in Laplace Méc cél. T. II p. 289 ist noch auf die Declination des Mondes (δ) und der Sonne (δ') Rücksicht genommen, wodurch $\frac{h}{g}$ übergeht in $\frac{h}{g}\left(\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}\right)^2$.

Wäre gleich auf die Declination δ Rücksicht genommen worden, so hätte jede Fluthhöhe im Aequator mit $\cos\delta^2$ multiplicirt werden müssen, da in einer wenig vom Kreise verschiedenen Ellipse die Entfernung r von der Mitte, verglichen mit der halben kleinen Axe b einen Unterschied $r-b$ giebt, wonach $r-b = b\,\frac{a^2-b^2}{2\,a^2}\cos\delta^2$, wenn δ der Winkel zwischen a und r, a die halbe grosse Axe ist. Man hat nämlich für rechtw. Coordinaten $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, und $x = r\cos\delta$, $y = r\sin\delta$ substituirt, giebt $r^2-b^2 = b^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\cos\delta^2 = (r+b)(r-b) = 2\,b\,(r-b)$ für eine vom Kreise wenig verschiedene Ellipse, wonach also die Differenzen der Radien sich dem Quadrate des Cosinus δ proportional ändern. Ein zweiter Radius r' würde geben $r'-b = \frac{b\,(a^2-b^2)}{2\,a^2}\cos\delta'^2$, also $\frac{r-b}{r'-b} = \left(\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}\right)^2$; und $\frac{r-b}{a-b} = \cos\delta^2$ oder $r-b = (a-b)\cos\delta^2$.

ausgedrückten Formel *) von Bernoulli berechnete Tafel, bei welcher das Verhältniss $\frac{h}{g} = \frac{5}{2}$ für die mittleren Entfernungen angenommen wurde, gab die folgende Fundamentaltafel (l. c. p. 189):

Dist. zwischen Sonne und Mond = t+t′, Correction = t:

t + t′ =	0°,	10°,	20°,	30°,	40°,	50°,	60°,
t =	0m,	— 11½m,	— 22m,	— 31½m,	— 40m,	— 45m,	— 46½m
t + t′ =	70°,	80°,	90°,	100°,	110°,	120°,	130°,
t =	— 40m,	— 25m,	0m,	+ 25m,	+ 40m,	+ 46½m,	+ 45m,
t + t′ =	140°,	150°,	160°,	170°,	180°.		
t =	+ 40m,	+ 31½m,	+ 22m,	+ 11½m,	0m.		

Da aber die Beobachtungen zu Brest und an anderen Orten nach den Abh. von Cassini (Par. Mém. 1710 ff.) schon gezeigt hatten, dass das Resultat aus der Stellung der Sonne zum Monde erst 1½ Tage später eintrete, so dass die drittfolgende Fluth z. B. nach Neu- und Vollmond die höchste, also die wirkliche Springfluth sei, und ebenso die drittfolgende Fluth nach den Mondvierteln die niedrigste u. s. w., demnach das Ergebniss jedesmal 36 Stunden später erfolge, so verminderte Bernoulli den jedesmaligen Winkel zwischen Sonne und Mond um 20 Grade, als dem der Bewegung in 36 Stunden entsprechenden durchschnittlichen Betrag.**) Es wurde also von nun an die Correction t für eine fingirte Sonne berechnet, welche um 20 Grade zurück steht gegen die wahre Sonne. Hieraus ergab sich die 2te Tafel, worin zugleich auf die Erdferne und Erdnähe Rück-

---

*) Bernoulli drückt den Sinus der hier mit t bezeichneten Correction so aus: $\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + B.B}}\right)}$ und $B = \frac{4\,mm - 7}{2\,m\,n}$ wo $m = \sin(t + t')$ und $n = \cos(t + t')$ bedeutet. Der obige bequemere Ausdruck mittelst der Tangente des doppelten Winkels scheint von Laplace zuerst gegeben zu sein. Die Idendität beider Ausdrücke ergiebt sich aus einer trigonometrischen Hülfsformel (s. a. im folgenden § 38).

**) Genauer entspricht der dritten Fluth durchschnittlich der Abstand 75m 42s, 7 = 18° 56′. Newton giebt 18½ Grad (Princ. L. III. Pr. 37 p. 540, Edit. 1742).

sicht genommen wird, indem der Quantität $\frac{h\}}{g}$ die Werthe 2,0 od. 2,5 oder 3,0 beigelegt werden, *) je nachdem es entweder die Erdferne, oder die mittlere Entfernung oder die Erdnähe des Mondes betrifft.

Dist. zw. Sonne u. Mond = t+t′−20°		0°	10°	20°	30°	40°	50°
Corr. = t in Zeitmin.	Perig.	+ 18 m	+ 9½ m	0 m	— 9½ m	—18 m	—26 m
	Med.	+21	+11½	0	—11½	—22	—31½
	Apog.	+27½	+14	0	—14	—27½	—39½

	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
Perig.	— 33 m	—37½ m	—38½ m	—33½ m	—21 m	0 m	+21 m
Med.	—40	—45	—46½	—40½	—25	0	+25
Apog.	—50	—56	—58	—50½	—31	0	+31

	130°	140°	150°	160°	170°	180°
Perig.	+ 33½ m	+38½ m	+37½ m	+33 m	+26 m	+19 m
Med.	+40½	+46½	+45	+40	+31½	+22
Apog.	+50½	+58	+56	+50	+39½	+27½

In dieser Form würde die Tafel wohl noch jetzt im Gebrauche sein, wenn es üblich geworden wäre, die s. g. Hafenzeit danach einzurichten, nämlich die Zeit der wirklichen Springfluth als Hafenzeit anzusetzen. Statt dessen ist aber der Gebrauch als bequemer und sicherer festgehalten worden (da die localen Bedingungen doch nicht allgemein für andere Oerter bekannt sind), die Hafenzeit als Zeit des hohen Wassers am Neu- und Vollmondtage selbst zu nehmen, und zwar diejenige Hafenzeit, welche bei der mittleren Entfernung des Mondes stattfindet. Die Tafel zeigt nämlich, dass die Hafenzeit sonst keine genaue Constante ist, sondern um 9 Minuten differiren könnte, indessen nimmt man in einigen Tabellen bei der übrigen Unsicherheit darauf keine Rücksicht. Nothwendig aber wurde es, die Zahlen der Bernoulli'schen Tafel so zu verändern, dass die

*) Diesen Zahlen entspricht sehr nahe das Verhältniss der Horiz. Parallaxen des Mondes: 53′, 57′ und 60½′ für das angesetzte Apogeum, Medium und Perigeum.

Correction am Neu- und Vollmondtage, also bei 0° und 180° Abstand oder 0^h und 12^h Culminationszeit = Null wurde. Die Tafel erhielt damit folgende Gestalt, wie sie noch allgemein gebräuchlich ist, nur gewöhnlich mit einigen Erweiterungen für die Zwischenstufen der Entfernung des Mondes von der Erde.

Culmination des Mondes (in wahrer Zeit).		Correction für den Einfluss der Sonne (halbmonatl. Ungleichheit). Hor. Par. 53′. Corr. bei der Erdf. d. Mond.	Hor. Par. 57′. Mittlere Corr.	Hor. Par. $60\frac{1}{2}$′. Corr. bei der Erdn. des M.
0^h 0^m od.	12^h 0^m	+ 6^m	0^m	— 3^m
0. 30.	12. 30.	— 4	— 7	— 10
1. 0.	13. 0.	— 14	— 15	— 16
1. 30.	13. 30.	— 25	— 24	— 23
2. 0.	14. 0.	— 35	— 32	— 30
2. 30.	14. 30.	— 45	— 41	— 36
3. 0.	15. 0.	— 54	— 48	— 43
3. 30.	15. 30.	— 1^h 2	— 55	— 49
4. 0.	16. 0.	— 1 11	— 1^h 1	— 54
4. 30.	16. 30.	— 1 16	— 1 5	— 57
5. 0.	17. 0.	— 1 18	— 1 7	— 59
5. 30.	17. 30.	— 1 17	— 1 7	— 58
6. 0.	18. 0.	— 1 11	— 1 1	— 54
6. 30.	18. 30.	— 57	— 50	— 45
7. 0.	19. 0.	— 36	— 33	— 31
7. 30.	19. 30.	— 13	— 15	— 16
8. 0.	20. 0.	+ 10	+ 4	0
8. 30.	20. 30.	+ 24	+ 16	+ 9
9. 0.	21. 0.	+ 33	+ 22	+ 14
9. 30.	21. 30.	+ 36	+ 25	+ 15
10. 0.	22. 0.	+ 35	+ 24	+ 16
10. 30.	22. 30.	+ 33	+ 20	+ 13
11. 0.	23. 0.	+ 24	+ 14	+ 8
11. 30.	23. 30.	+ 15	+ 7	+ 3
12. 0.	24. 0.	+ 6	0	— 3

Eine neuere Tafel derselben (mittleren) Correction für den Einfluss der Sonne (semimenstrual inequality), ist von Dessiou unter Lubbock's Direction für die englische Admiralität berechnet, und gründet sich auf mehr als 13000 Beobachtungen zu London, Liverpool, Pembroke, Ramsgate, Sheerness, Portsmouth und Brest. Auch St. Helena ist eingeschlossen, jedoch nur mit wenigen Beobachtungen. *) Für dieselben Argumente, wie in der vorigen Tafel, giebt die Tafel von Dessiou folgende Resultate:

Mondsculm.	0^h	$0^h 30^m$	$1^h 0^m$	$1^h 30^m$	$2^h 0^m$	$2^h 30^m$	$3^h 0^m$	$3^h 30^m$	$4^h 0^m$
Mittlere Corr.	0	— 6	—13	—20	—28	—36	—43	—49	—55

$4^h 30^m$	$5^h 0^m$	$5^h 30^m$	$6^h 0^m$	$6^h 30^m$	$7^h 0^m$	$7^h 30^m$	$8^h 0^m$	$8^h 30^m$
— 1 0	— 1 3	— 1 5	— 1 3	— 56	— 44	— 30	— 15	— 1

$9^h 0^m$	$9^h 30^m$	$10^h 0^m$	$10\ 30^m$	$11^h 0^m$	$11^h 30^m$	$12^h 0^m$
+ 9	+15	+16	+15	+11	+6	0.

Ist die Culmination grösser als 12 Stunden, so wird sie von 24 Stunden subtrahirt und mit dem Reste die Correction gefunden.

Die Vergleichung dieser von Dessiou aus so zahlreichen neueren Beobachtungen berechnete Tafel mit der vor mehr als einem Jahrhundert von Bernoulli gegebenen, zeigt im Ganzen keine den Umständen nach grosse Abweichungen, und kann dem bisherigen allgemeinen Gebrauche der Bernoulli'schen Tafel nur zur Rechtfertigung dienen. **) Nur für die Fluthzeiten etwas nach der Quadratur steigen die Differenzen bis auf eine Viertelstunde und ein Paar Minuten darüber.

Auf die Unterschiede nach den verschiedenen Entfernun-

*) Diese Tafel findet sich auch in Raper's Practise of Navigation. II. Edit. London 1852 p. 307.

**) Lubbock bemerkt auch, nach wiederholter Bearbeitung des Gegenstandes, über Bernoulli's Leistung: his accurate determination of the law of the semimenstrual inequality is one of the most important results ever obtained à priori by means of the theorie of universal gravitation. Phil. Tr. 1834. p. 144.



gen des Mondes ist die Tafel von Dessiou nicht eingegangen, so dass sich die Fehler nur auf die mittlere Entfernung beziehen. Doch ist in den ausführlichen Tafeln von Lubbock auf Parallaxe und Declination sehr eingehend Rücksicht genommen.

In einigen neueren nautischen Büchern *) ist wohl durch eine Verwechselung das Argument der Tafel in Beziehung auf diese Correction nach den Entfernungen des Mondes umgekehrt angesetzt worden, so dass für die Erdnähe des Mondes oder den grössten Halbmesser auch die grösste Correction gegeben wird, statt der Sonne bei der Erdnähe des Mondes den kleinsten Einfluss zuzuschreiben, und umgekehrt den grössten bei der Erdferne.

Eine minder genaue, doch gleichfalls sehr gebräuchliche andere Form der Bernoulli'schen Tafel giebt die s. g. Verspätung des hohen Wassers, vom Neumonde an gerechnet, daher am bequemsten nach dem Mondsalter geordnet. Die Zahlen für diese Verspätung wurden erhalten, indem man an die mittlere Verspätung (darin liegt die Ungenauigkeit) des Mondes die Correction aus der vorher berechneten Tafel anbrachte.

Die noch am Schlusse des vorigen § angeführten Thatsachen betreffend, dass im Anfange des Frühlings und Herbstes die Springfluthen höher als gewöhnlich sind, so erklären sich dieselben im Allgemeinen dadurch, dass in diesem Falle Mond

---

*) J. W. Norie Epitome of practical Navig. 15. Edit. London 1852 p. 78 Da die Tafeln von Norie ihrer Correctheit wegen im Allgemeinen geschätzt sind, so ist die gedachte Verwechselung von hier aus vermuthlich schon nach früheren Ausgaben (wenigstens schon v. J. 1835) in andere Tafeln übergegangen z. B. in Dr. E. Bobrik's Handbuch der prakt. Seefahrtskunde, Leipzig 1848 Tafeln dazu p. 302, wo diese Tafel ganz gleichlautend mit der in Norie ist. Eben so in einigen späteren Ausgaben des Hamburger Handbuchs der Schifffahrtskunde. Ferner in Prof. Jnman's Navigation, London 1849 u. m. a. Schon Lubbock (Phil. Transat- 1831 p. 381) bemerkt über diesen Fehler: J have had occasion in the Preface to my „Account of the Traité sur le Flux et Reflux de la Mer" of Daniel Bernoulli, to point out an error which exists in several Tables of this kind (works on navigation), from the heading being reversed.

und Sonne im Aequator zusammen wirken,*) also eine Fluthwelle im grössten Kreise fortschreitend zu erregen streben. In den Quadraturen ist um dieselbe Zeit die Sonne zwar noch im Aequator, aber der Mond möglichst weit vom Aequator entfernt, also die Flutherregung des Mondes schwächer als gewöhnlich. Während daher die Springfluthen nach der früheren Bezeichnung $x + y$ zu einem Maximum machen, da x sowohl als y ein (relatives) Maximum ist, so giebt anderseits die Formel für die Quadraturfluth oder $x - y$ ein Minimum, in sofern x ein Minimum und y ein Maximum wird (wenn x sich immer auf den Mond, y auf die Sonne bezieht). Aehnlich erklärt sich das umgekehrte Verhältniss im Anfange des Winters und Sommers, wo $x + y$ ein Minimum ist, da jedes für sich zu einem Minimum wird, während $x - y$ zu einem Maximum gelangt, weil in der Quadratur zu dieser Zeit x im Aequator, y möglichst weit davon entfernt wirkt. Endlich wird bei nördlicher Declination des Mondes die Fluth aus der oberen Culmination auf nördlicher Breite die grössere sein, weil der Mond dem Zenith näher culminirt als dem Nadir; umgekehrt hat man bei südlicher Declination des Mondes die Fluth aus der untern Culmination als die grössere zu erwarten, da der Mond dem Nadir näher als dem Zenith culminirt. Aber diese Differenzen sind lange nicht so erheblich, wie man aus dieser abgesonderten Betrachtung vermuthen möchte, da nach den Beobachtungen beinahe eine solche Ausgleichung eintritt, als wenn die schwächere und stärkere Flutherregung sich compensirten. Uebrigens ist schon bemerkt, dass die Untersuchung des hydrostatischen Gleichgewichts nicht zur Erklärung aller Erscheinungen ausreicht, und selbst die hydrodynamische Auflösung nicht alles erklärt. So wird auch die Frage nach der Ursache, warum die Wirkung der Stellung von Sonne und Mond nicht sogleich, sondern in „unsern" Häfen erst 36 Stunden später

*) Laplace fand nach der ausführlichen Theorie der Oscillatione des Meeres es bestätigt, dass die Aequinoctialfluthen die grössten sein müssten; und ebenfalls, dass sich die beiden an sich sehr verschiedenen Fluthen eines und desselben Tages in den Solstitien nahe ausgleichen. — Als fremde Ursachen zur Verstärkung der Fluthen kommen übrigens noch die Aequinoctialstürme hinzu.

eintritt, von Laplace auf Nebenumstände *) verwiesen, die sich der Theorie entziehen. Bemerkenswerth ist hierüber noch, dass eine Zählung der Fortpflanzung der Fluthwellen (nach der Karte der Isorachien von Whewell) von der Mitte des stillen Oceans (als angenommener Hauptquelle der Flutherregung) bis zu der europäischen Küste z. B. der Nordsee, 2 bis 3 Tage Zeit ergiebt, während diese Fluthwelle von derselben Quelle gezählt, bis zum Cap Blanco und gleichzeitig in Neufundland schon in 36 Stunden anlangt.

§ 38. Zusammenstellung der verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Zeit des hohen Wassers.

1) Die älteste Bestimmungsart der Zeit des hohen Wassers ist von der Erfahrung dargeboten worden, dass das hohe Wasser für jeden bestimmten Ort auch mit einer gewissen Richtung des Mondes ungefähr zusammentreffe, und unsere älteren nautischen Bücher geben noch diese Richtung für jeden bemerkenswerthen Ort an. So ist z. B. für Honfleur an der französischen Küste bemerkt, dass der „Südostmond" hohes Wasser macht, für Hartlepool an der englischen Küste der Südwestmond u. s. w. Es wurde die Vervollständigung dieser Erfahrungen für die verschiedenen Oerter aus eigenen Beobachtungen den Seefahrern zur Pflicht gemacht z. B. in den Vorschriften Sebastian Cabots vom Jahre 1553. **) Auch in den späteren nautischen Tafeln z. B. den ältesten in deutscher Sprache ***) von Prof. Röhl ist die letzte Tabelle überschrieben: „Tabelle für die Compassstriche des Mondes zur Fluthzeit." Freilich ist hier schon die Fluthzeit selbst zur Zeit des Neu- und Vollmondes, also die s. g. Hafenzeit, dabei vorangestellt, aber daneben folgt der Compassstrich, wie er sich durch blosse Verwandlung des Stundenwinkels ergiebt; also wurde das Azimuth dem Stundenwinkel gleich ge-

*) Circonstances accessoires. Méc. cél. T. V. p. 161.

**) Peschel's Gesch. der Erdkunde p. 390.

***) Röhl's Anleitung zur Steuermannskunst. Greifswald 1778.

setzt. Z. B. für Honfleur: Fluthzeit $9^h\ 0^m$, Compassstrich des Mondes SO und NW; für Hartlepool: Fluthzeit $3^h\ 0^m$, Compassstrich NO und SW. — Wenn nun auch dies ganze Verfahren, sich auf den Compassstrich zu verlassen, nachher mit Recht getadelt wurde (schon von Robertson 1754), so bleibt doch so viel davon bemerkenswerth, dass diese Lootsenregel, ganz ohne Kalender und überhaupt ohne alle Rechnung, durch die blosse Peilung des Mondes, eine ungefähre Näherung für die Zeit des hohen Wassers erfahrungsmässig erzielen konnte.

2) Als zweite Bestimmungsart ist diejenige anzuführen, welche die gegebene Hafenzeit benutzt, jedoch ohne Hülfe eines astronomischen Jahrbuchs, indem die Culminationszeit des Mondes nur cyklisch, nämlich nach dem Mondsalter berechnet wird. Hierzu dient am einfachsten die directe Ermittelung der Epacte oder des Mondsalters am Neujahrstage des gegebenen Jahres. Diese Epacte findet man aus der Division der gegebenen Jahreszahl durch 19, indem man den Rest mit 11 multiplicirt; das Product ist die Epacte, wenn sie nicht über 30 ist, sonst ist noch durch 30 zu dividiren und der Rest für die Epacte zu nehmen. Z. B. für 1870 ist $\frac{1870}{19} = 98 + \frac{8}{19}$, $8 \times 11 = 88$, $\frac{88}{30} = 2 + \frac{28}{30}$, folglich ist 28 die Epacte für das Jahr 1870. Die Begründung dieser cyklischen Rechnung liegt darin, dass nach Ablauf von 19 Jahren die Neu- und Vollmonde wieder auf dasselbe Datum fallen, wenn auch nicht genau auf dieselbe Stunde; *) ferner, dass 12 synodische Monate (von $29\frac{1}{2}$ Tagen) zusammen 354 Tage (ein Mondenjahr) betragen und das Sonnenjahr von 365 Tagen also den Unterschied 11 übrig lässt; endlich dass jedes Jahr unserer Zeitrechnung im gegenwärtigen Jahrhundert ein solches ist, dass die Reste 1, 2, 3, 4, 5 . . bei der Division mit 19 zu den Epacten 11, 22, (33 = 3), 14, 25

*) Die Differenz beträgt in 19 Jahren nur 0,06 Tage, nämlich $= 19 \times 365\frac{1}{4} - 235 \times 29{,}5306 = 6939{,}75 - 6939{,}69$; demnach erst in 300 Jahren einen ganzen Tag.

u. s. w. gehören. *) Da hierbei die Differenz genau = 11 angenommen wird, ferner der synodische Monat = 30 Tagen, und die einzelnen Schaltjahre nicht beachtet werden, so kann der cyklisch berechnete Neu- und Vollmond (wonach das Osterfest bestimmt wird) von dem wahren oder astronomischen Neu- und Vollmonde zuweilen um einige Tage abweichen.

Hat man die Epacte, also das Mondsalter am 1. Januar, gefunden, so berechnet man das Mondsalter für den gegebenen Tag dadurch, dass zunächst für Januar und Februar zusammen ($31 + 28 = 59$) zwei vollständige synodische Mondumläufe gezählt werden; daher rechnet man nur vom 1. März an die verflossene Zahl der Monate, addirt diese **) zu der Epacte, und endlich noch hierzu die Zahl der Tage des letzten Monats, also das Datum. Die Summe von Epacte + Monatszahl (seit März) + Datum giebt die gesuchte Zeit des Mondsalters. Sollte dies mehr als 30 betragen, so ist noch durch 30 zu dividiren und der Rest als das Mondsalter zu nehmen. Z. B. für 1870 den 26. Mai wird das Mondsalter = 28 (die obige Epacte) + 2 (für März und April) + 26 (Datum) = 56; $\frac{56}{30} = 1 + \frac{26}{30}$, daher ist 26 das gesuchte Mondsalter. (Die genaue Angabe nach der astronomischen Rechnung im Nautical Almanac ist 25,7 Tage.)

Nachdem das Mondsalter gefunden ist ergiebt sich die Culminationszeit des Mondes in Stunden angenähert durch Multipliciren des Mondsalters mit $\frac{4}{5}$. Nämlich $\frac{4}{5} = \frac{48}{60}$, indem 48 Minuten (statt 48 Min. 45,8 Sec.) für die durchschnittliche Verspätung des Mondes in einem mittleren Sonnentage (worauf es hier ankommt) gerechnet wird.

*) Für das folgende Jahrhundert hätte man die nach der obigen Regel gefundenen Zahlen um 1 zu vermindern um die entsprechenden Epacten zu erhalten. Diese werden daher 10, 21, 2, 13, 24 u. s. w. in Uebereinstimmung mit der cyklischen oder Kirchenrechnung.

**) Die 10 Monate von März bis December, mit abwechselnd 30 und 31 Tagen, haben durchschnittlich $30\frac{1}{2}$ Tage (eigentlich 30,6 wegen des Augustmonats), also jeder einen Tag mehr als der synod. Monat von $29\frac{1}{2}$ Tagen.

Endlich wird die Hafenzeit als die durch Erfahrung gegebene Zahl zu der Culminationszeit addirt, so erhält man die Zeit des hohen Wassers.

Diese Rechnungsart ist also ohne Rücksicht auf die Correction für den Einfluss der Sonne geführt, kann daher im ungünstigen Falle aus diesem Grunde etwas mehr als eine Stunde unrichtig werden. Reichlich eben so viel kann aber auch schon der Fehler der cyklischen Rechnung betragen. Freilich wird häufiger eine theilweise Compensation dieser Fehler als ein Zusammentreffen der extremen Werthe nach derselben Seite hin eintreten.

Beispiel. Für Hartlepool den 26. Mai 1870 die Zeit des hohen Wassers zu finden.

Auflösung. Das schon berechnete Mondsalter war 26 Tage. Das Product $26 . \frac{4}{5} = 20^h\ 48^m$ ist die Culminationszeit des Mondes genähert. *) Die Hafenzeit $3^h\ 28^m$ (nach der gegenwärtigen Angabe des Naut. Alm.) hinzugelegt giebt $24^h\ 16^m$ nach dem Mittage des gegebenen Tages. Ferner $24^h\ 50^m$ **) subtrahirt, so bleiben $23^h\ 26^m$ oder $11^h\ 26^m$ Vormittags den 26. Mai für die gesuchte Zeit des hohen Wassers. Hier tritt der Fall ein, dass in den 24 Stunden dieses Tages nur einmal hohes Wasser ist, indem die vorhergehende und folgende Hochwasserzeit schon auf ein anderes Datum fällt.

3) Mit Rücksicht auf den Einfluss der Sonne hat man nun (seit 1740) aus der Bernoulli'schen Tafel (§ 37) die Correction zu entnehmen, welche an die Culminationszeit des Mondes an-

---

*) Nach der astron. Berechnung im Naut. Alm. sollte die Culminationszeit am 26. Mai $21^h\ 50^m$ sein. Obgleich also der Fehler des Mondsalters nur 0,3 Tage betrug, hat die abgekürzte Aufrechnung nach der mittleren Bewegung des Mondes hier einen Fehler von $1^h\ 2^m$ hervorgebracht. Die genauere Multiplication giebt $= 26 \times 48^m\ 46^s = 21^h\ 8^m$.

**) Der genaue Durchschnittswerth ist $24^h\ 50^m\ 28^s 5$ nach § 36, da es hierbei auf die Verspätung des Mondes in einem Mondtage ankommt, während die Verspätung in einem mittleren Sonnentage $24^h\ 48^m\ 45^s, 8$ beträgt.

zubringen ist, um dann durch Hinzufügung der Hafenzeit die Zeit des hohen Wassers zu finden. Man erhält in dem vorigen Beispiele $20^h\ 48^m + 21^m + 3^h\ 28^m = 24^h\ 37$; $24^h\ 37 - 24^h\ 50^m = 11^h\ 47^m$ Vormittags für die Zeit des hohen Wassers am 26. Mai 1870 für Hartlepool (noch behaftet mit dem Fehler der cyklischen Rechnung).

4) Eine etwas abgekürzte Berechnung der Hafenzeit mittelst des Mondsalters bezieht sich auf diejenige Form der Bernoulli'schen Correctionstafel *) für den Einfluss der Sonne, deren Argumente nach dem Mondsalter geordnet sind, also minder genau, nur die mittlere Bewegung des Mondes voraussetzen. Die Tafel giebt die Verspätung des hohen Wassers mit Einschluss der Correction für den Einfluss der Sonne. Damit wird das vorige Beispiel so berechnet: Mondsalter 26 Tage giebt nach der Tafel die Verspätung $21^h\ 31^m$, dazu die Hafenzeit $3^h\ 28^m$, so ist $24^h\ 59^m$ nach dem Mittage des 26. Mai, oder wenn $24^h\ 50^m$ abgezogen wird, $0^h\ 9^m$ Nachmittags den 26. Mai die Zeit des hohen Wassers. Die Differenz mit dem vorigen Resultate, wo ebenfalls nach der mittleren Bewegung gerechnet ist, liegt in der abgekürzten Multiplicationsregel, die tägliche Verspätung von $48^m\ 45^s 8 = 48^m = \frac{4}{5}$ Stunden zu setzen. Die genauere Multiplication von $26 \times 48^m\ 46^s$ giebt $21^h\ 8^m$ statt $20^h\ 48^m$ und damit wird auch das obige Resultat 20 Minuten grösser oder $0^h\ 7^m$ in naher Uebereinstimmung mit dem hier gefundenen. **)

5) wird die Culminationszeit nicht nach dem Mondsalter berechnet, sondern einem astronomischen Kalender entnommen und für die Länge des gegebenen Ortes reducirt, so erhält man

---

*) Von dem Urheber ist auch diese Form der Tafel schon (l. c. p. 201) berechnet, jedoch nur als Table approchante bezeichnet worden.

**) Die wahre Bewegung des Mondes ist in diesem Falle aber von der mittleren so weit verschieden, dass zu einem Mondsalter von 25,7 Tagen schon $21^h\ 50^m$ Culminationszeit gehören, während die Durchschnittsrechnung für ein Mondsalter von 26 Tagen nur $21^h\ 8^m$ giebt, und für 25,7 Tage: $20^h\ 53^m$, also 57^m zu wenig.

das Resultat viel genauer, indem alle Fehler der cyklischen Rechnung damit beseitigt werden. *)

In dem vorigen Beispiel ergiebt sich hiernach, wenn man von der Culminationszeit des vorhergehenden Tages ausgeht (um nicht nachher $24^h\ 50^m$ zurückzurechnen und dadurch die Corr. aus der Tafel ungenauer zu erhalten):

$21^h\ 9^m + 23^m + 3^h\ 28^m = 25^h\ 0$ P.M. d. 25. Mai $= 1^h\ 0^m$ P.M. 26. Mai.

(Man pflegt mit P. M. (post meridiem) den Nachmittag u. mit A. M. (ante meridiem) den Vormittag zu bezeichnen.)

Nimmt man statt der Corr. aus der Bernoulli'schen Tafel, die Corr. aus der Tafel von Dessiou (§ 37), so wird diese Corr. $= + 12^m$ also 11_m kleiner und das Resultat für die Hochwasserzeit demnach $= 0^h\ 49^m$ Nachmittags den 26. Mai.

Auf die Zeitgleichung Rücksicht zu nehmen würde noch etwas genauer sein, da die Mondsculmination in den Jahrbüchern in mittlerer Zeit gegeben ist, als Argument der Correctionstafel aber nur die wahre Zeit angenommen werden konnte. Unerheblich ist freilich die Verbesserung nicht, da die Zeitgleichung höchstens eine Viertelstunde beträgt und daraus sich doch eine Aenderung der Correction von höchstens 11 Minuten ergeben könnte. Man hätte also die mittlere Culminationszeit in wahre zu verwandeln und damit die Correction für den Einfluss der Sonne aus der Tafel zu entnehmen, aber an die mittlere Culminationszeit anzubringen, da die Hochwasserzeit in mittlerer Zeit gewünscht wird. In dem obigen Beispiele ist aber der Betrag verschwindend klein.

Die Berücksichtigung der Parallaxe (54′, also Erdferne) giebt die Correction $+ 31^m$, mithin 8^m grösser. Die Zeit des hohen Wassers wird hiernach $1^h\ 8^m$ Nachmittags d. 26. Mai.

6) Eine sechste Bestimmungsart des hohen Wassers wäre nun die Formel von Laplace. **) Aehnlich wie in der Bernoulli-schen Formel wird auch hier die Tangente des doppelten gesuchten Winkels, jedoch vollständiger mit Rücksicht auf die

*) Die Berechnung des hohen Wassers nach dem Mondsalter nimmt nur so viel als Vortheil in Anspruch, dass dabei kein astron. Kalender nöthig ist.

**) Mécanique céleste. T. II p. 289.

Declinationen des Mondes und der Sonne ausgedrückt durch den Bruch:

$$\frac{\sin 2(\psi - \psi')}{\cos 2(\psi - \psi') + \frac{L' r^3}{L r'^3}\left(\frac{\cos v'}{\cos v}\right)^2}$$

wo L, r, ψ und v die Masse, Entfernung, Rectascension und Declination der Sonne, L', r', ψ' und v' dieselben Grössen für den Mond bezeichnen. Die Schwierigkeit, für diese Formel mit Rücksicht auf die Declinationen und Entfernungen der Sonne eine zweckmässige Tafel einzurichten, veranlasste Laplace *) ihr eine andere Form zu geben um genähert den Betrag zu berechnen, während für den Einfluss der Declinationen durch eine besondere Hülfstafel gesorgt werden sollte. Die noch übrige Formel hängt alsdann nur von den, den Entfernungen entsprechenden scheinbaren Halbmessern des Mondes und der Sonne und von ihrem Rectascensionsunterschiede ab.

Für den nautischen Gebrauch ist nun zwar durch die Bernoulli'sche Tafel weder auf die wechselnde Entfernung der Sonne, noch auf die Declinationen von Mond und Sonne in jedem Falle Rücksicht genommen; aber in Ermangelung der Kenntniss der localen Constante **) für die einzelnen Oerter, welche in der Formel von Laplace ebenfalls nicht entbehrt werden kann, hat man sich bisher nicht veranlasst gesehen, durch vollständigere Tabellen zum allgemeinen Gebrauche mit Rücksicht auf jene kleineren Correctionen die Zeit des hohen Wassens zu bestimmen. ***) Nach den mittleren Entfernungen hatte Bernoulli

*) Méc. cél. T. II p. 291.

**) Laplace setzt diese Constante nach den Beobachtungen in Brest = 1,50724 Tage, um welche die höchste Fluth nach den Syzygien eintritt. Die Multiplication mit der mittleren täglichen Verspätung des Mondes giebt $1^h\ 13'\ 30^s = 18^0\ 20'$ Bernoulli hatte dafür in runder Zahl 20° angewandt. Der von den Declinationen abhängige Factor $\left(\frac{\cos v'}{\cos v}\right)^2$ kann unter Annahme der grössten Declination des Mondes $= 23^0\ 28' + 5^0\ 19' = 28^0\ 47'$, zwischen 0,77 und 1,30 variiren.

***) Tafeln für die halbmonatliche Ungleichheit nach der Formel von Laplace mit Rücksicht auf Parallaxe und Declination des Mondes und der Sonne berechnet (zu-

den Werth von $\frac{L' r^3}{L r'^3} = 2{,}5$ angenommen. In der Formel von Laplace ist dafür 2,89841 gesetzt worden, um den Fluthbeobachtungen noch besser zu entsprechen. — Abgesehen von der Vervollständigung ist auch wohl die bequemere Gestalt der Formel selbst zuerst von Laplace eingeführt worden. Bernoulli bestimmte die Correction nicht durch die Tangente ihres doppelten Werthes, sondern setzte den Sinus der einfachen Correction t:

$$\sin t = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)},\ B = \frac{4\,mm - 7}{2\,m.n}$$ oder nach der Bezeichnung in § 37: $B = \frac{4 \sin^2 (t + t') - 7}{2 \sin (t + t') \cos (t + t')}$

Die Verwandlung giebt $B = \frac{-2 \cos 2 (t + t') - 5}{\sin 2 (t + t')}$;

$-\tfrac{1}{2} B = \frac{\cos 2 (t + t') + 2{,}5}{\sin 2 (t + t')} = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt, so wird $\sin t$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{4 + 4 \operatorname{tg} \varphi^2}}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \varphi^2}}\right)}$$

$= \sqrt{\tfrac{1}{2} (1 - \sin \varphi)} = \sin (45 - \tfrac{1}{2} \varphi)$; daher $t = 45 - \tfrac{1}{2} \varphi$, $\varphi = 90 - 2\,t$ und

$\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} 2\,t = \frac{\sin 2 (t + t')}{\cos 2 (t + t') + 2{,}5}$, welches die von Laplace gegebene Form ist, die auch in § 37 hergeleitet wurde. Die dagegen etwas unbequem erscheinende Form desselben Ausdrucks von Bernoulli hatte ihren Grund in der damals (1740) noch nicht gebräuchlichen, erst von Euler später allgemein eingeführten Be-

sammen 5 Tafeln), sind in Prof. Caillet's Traité de Navigation, Brest 1846, enthalten. Zum weiteren Anschluss an die Beobachtungen in französischen Häfen verweist derselbe auf Chazallon's Annuaire. Chazallon hat, angeregt durch die Arbeiten von Lubbock und Whewell in England, neue Beobachtungsreihen in Frankreich veranlasst, und bei der Bearbeitung derselben, mehrere neue kleine Oscillationen der Fluth bemerkt, welche zur Periode $1/4$, $1/6$, $1/8$, $1/10$ und $1/12$ des Mondtages haben. Nach den Tafeln von Caillet berechnet mit 54′ 14″ Hor. Par. und 3° 26 Declin. des Mondes (welche 36 Stunden früher statt fand) giebt die Berechnung des obigen Beispiels 1^h 5^m Nachmittag den 26. Mai für die Zeit des hohen Wassers.

zeichnung der trigonometrischen Functionen in den Formeln, wodurch alle Beziehungen zur Erlangung der bequemsten Form am leichtesten zur Verfügung stehen. Francoeur (Astronomie practique, Paris 1840, II Edit. p. 369) kam sogleich auf die von Laplace erhaltene Form, indem er die Bernoullische Formel zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten suchte. Auch Caillet, Navigation, (Texte) Brest 1848 p. 256 kam auf die Identität der Formeln von Bernoulli und Laplace, wenn auf die Declination keine Rücksicht genommen wird, glaubte aber, dass diese Identität früher nicht bemerkt worden sei.

7) Die neueste Methode zur Bestimmung der Zeit des hohen Wassers gründet sich gänzlich auf die für London schon voraus berechneten Hochwasserzeiten. Der Nautical Almanac (p. 494 und 495) giebt diese Tides unter der Ueberschrift: Mean Time of high water at London Bridge. Dieselben sind aus vielen regelmässigen Beobachtungen der Hochwasserzeiten, also mit möglichster Berücksichtigung der localen Einflüsse berechnet worden nach den Tafeln von Lubbock. *) Die Bestimmung der Zeit des hohen Wassers für jeden andern Ort ist hiernach die leichteste, indem man nur die Differenz der Hafenzeiten zwischen London (dessen Hafenzeit = $2^h\ 7^m$ ist) und dem gegebenen Orte zu der für London vorausberechneten Zeit hinzuzufügen hat. Hat der gegebene Ort weniger Hafenzeit als London, also weniger als $2^h\ 7^m$, so ist die Differenz der Hafenzeiten zu subtrahiren. Ausserdem wird der Einfluss des Längenunterschiedes zwischen London und dem gegebenen Orte dadurch berücksichtigt werden können, dass man die Verspätung der gegebenen

*) J. W. Lubbock: An elementary Treatise on the Tides, London 1839, wird vom Naut. Alm. p. X angeführt, scheint aber für sich nicht im Buchhandel vorhanden zu sein, sondern im Companion of the British Almanac.

Die ausführlichen Abhandlungen über den Gegenstand von demselben Verfasser sind in den Phil. Tr. für 1830—1839 gegeben worden. Lubbock scheint überhaupt der erste gewesen zu sein, der die Correctionen in Beziehung auf Parallaxe und Declination durch Beobachtungen bestimmt und die Abweichungen gezeigt hat, welche noch in den Resultaten nach der Bernoullischen Formel übrig bleiben.

Fluthzeiten (von einer Fluthzeit zur andern) aus demselben Verzeichniss des Naut. Alm. entlehnt, welches offenbar genauer ist als die Verspätung des Mondes dafür zu setzen. Die Berechnung des vorigen Beispiels nach diesem Verfahren giebt:

1870 Mai 25. 23^h 40^m Hoch Wasser in London
1. 21 Differenz der Hafenzeit
25. 1
1870. Mai 26. 1. 1. Hochwasser in Hartlepool,

also nur um 7 Minuten verschieden. Die Uebereinstimmung in dieser Genauigkeit ist nur zufällig, da die Differenzen in andern Fällen eine Viertelstunde und mehr betragen können.

Freilich könnte die allgemeine Anwendbarkeit dieser empirischen Methode für sehr weit von London entlegene Oerter insofern zweifelhaft sein, als nicht anzunehmen ist, dass die localen Einflüsse sich so weit erstrecken werden. Indessen ist in diesem Falle auch durch die übrigen Methoden nichts entschieden Besseres vorhanden, da die Bernoulli'sche Tafel sich gleichfalls nur auf Beobachtungen in europäischen Häfen stützte, indem sie ursprünglich eine Constante wie die von 20° aufgenommen hat. Die genauere Berechnung der Hochwasserzeiten wird also in der Zukunft erst dadurch möglich werden, dass man aus vielen Beobachtungen an den verschiedensten Oertern die Werthe der localen Constanten ermittelt, welche keine Theorie vorher zu bestimmen vermag.

Berichtigungen und Zusätze.

Seite 67 u. ff. statt Ligowsky ist zu lesen: Ligowski.
„ 129 statt Gonld ist zu lesen: Gould.
„ 155 unten, Zusatz: In den Syzygien erreicht auch das Wasser einen niedrigern Stand, und in den Quadraturen sinkt es minder tief als zu andern Zeiten.
„ 156 zu 4) hinzuzufügen: abgesehen von localen Abweichungen, die besonders an einem Theile der englischen Küste sorgfältig beobachtet wurden, wo die Wirkung sich noch mehr verspätet gezeigt hat und z. B. für London nach Lubbock's Untersuchungen 2½ Tage beträgt. (S. a. Whewell Phil. Tr. 1834 p. 21.)
„ 158 statt § 38 ist zu lesen: § 37.
„ 169 Anmerkung. Zur näheren Vergleichung wird folgende Zusammenstellung des Wortlautes der betreffenden Schriften dienen:

P. W. Tegner: Den nautiske Astronomie. Kiöbenhavn 1840—44.	**Albrecht** und **Vierow:** Lehrbuch der Navigation. 2. Aufl. Berlin 1857. (Gleichlautend mit d. später. Ausg.)
S. 384: „Man har endvidere iagtaget, at Virkningen af Maanens og Solens Tilträkning ikke viser sig öieblikkeligen, men först efter Forlöbet af 36 Timer og derover.	S. 614: „Man hat wahrgenommen, dass die Wirkungen der Anziehung des Mondes und der Sonne sich nicht augenblicklich, sondern erst nach Verlauf von etwa 36 Stunden und darüber zeigen.
S. 386: Newton fandt, at Springfloden ikke overalt war den tredie Flod efter Zyzygierne.	S. 615: Newton hat gefunden, dass die grösste Fluth nicht überall den dritten Tag nach den Syzygien eintrifft.
Richter fandt, at det war mod den tredie Dag, at Springfloden kommer ved Cayenne."	Richter hat gefunden, dass die Springfluth den dritten Tag bei Cayenne statt hat."

Hier ist es wohl gestattet zu fragen: wer ist der neben Newton genannte Richter in Cayenne? Denn wenn der Name sich nur bei Tegner fände, so würde man es einfach für einen Druckfehler nehmen und auf den bekannten französischen Akademiker Richer beziehen, dessen im J. 1671 nach Cayenne angetretene und besonders durch seine Pendelbeobb. berühmt gewordene Expedition auch zu seinen Beobachtungen: Sur les marées de Cayenne Gelegenheit gegeben hat, die uns noch in den Memoiren der Pariser Akademie erhalten sind. Weil aber dieselbe Schreibart sich in der deutschen Bearbeitung von einer Auflage zur andern wiederholt, so wäre es interessant zu erfahren, wo sich die Fluthbeobachtungen jenes Richters finden mögen, der ja möglicherweise eben so competent wie der Franzose Richer, dergleichen Beobachtungen in Cayenne angestellt haben könnte?

Ferner über das, was Newton gefunden haben soll, so stehen die Sätze bei Tegner sich wenigstens nicht entgegen, während für die Lesart „den tredie Flod“ im mittlern Satze „den dritten Tag“ zu setzen, ein Widerspruch mit dem kurz vorhergehenden Satze entsteht, und dasselbe daher bei dem übrigen wörtlichen Anschlusse als eine unrichtige Uebersetzung erscheinen konnte. In Newton's Princip. Lib. III. Prop. 34 wird aus den Beobachtungen zu Plymouth und Bristol entschieden die dritte Fluth nach den Syzygien für diese Häfen als die höchste Fluth bezeichnet. Ebendaselbst wird angegeben, dass für einige Meerengen und Flüsse die höchste Fluth sich bis zur vierten oder fünften Fluth nach den Syzygien verzögere. Dürfte also die Beobachtung in Cayenne als die älteste (?) vorangestellt werden, so wären die angeführten Sätze noch verträglich mit einander zu ordnen, wenn man sie z. B. bei Albrecht u. Vierow rückwärts lesen wollte.

S. 179. Ueber das Schicksal der Bernoullischen Tafel, wonach ein Theil der nautischen Schriftsteller dieselbe mit vollständig umgekehrten Argumenten in Bezug auf die Entfernung des Mondes giebt, wäre es wünschenswerth, den Ursprung dieses schon von Lubbock angezeigten Fehlers literarisch weiter zu verfolgen, da das hier Angedeutete nicht erschöpfend ist.

